Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКА

Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов
общеобразовательных учреждений

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 519.2+373.167.1:51
ББК 22.17я72
Т98

Тюрин Ю. Н. и др.

Т98 Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2014. — 248 с.

ISBN 978-5-4439-0724-6

Экспериментальное учебное пособие по основам теории вероятностей рассчитано на учащихся 10—11 классов общеобразовательных учреждений и студентов нематематических специальностей вузов.

Учебное пособие удовлетворяет образовательным стандартам по математике, включая ФГОС нового поколения.

Может использоваться независимо от других учебных пособий, поскольку содержит весь необходимый базовый материал, либо как продолжение учебника «Теория вероятностей и статистика» для основной школы (М.: МЦНМО, 2008), написанного теми же авторами. Книга предназначена для первичного знакомства учащихся со случайными величинами и их характеристиками, приложениями теории вероятностей к социологии, задачам страхования и т. п. Может использоваться в качестве дополнительного пособия для студентов нематематических специальностей. В приложениях даны задачи для повторения и примерные контрольные работы по теории вероятностей для 10 и 11 класса. Авторы стремились не злоупотреблять математическим формализмом в изложении.

ББК 22.17я72

ISBN 978-5-4439-0724-6

От авторов

Несколько лет назад теория вероятностей и статистика стали частью образовательного стандарта средней школы. Задачи по вероятности и статистике вошли в единый государственный экзамен по математике. Эти разделы математики обеспечивают непосредственную связь математического образования с жизнью и вопросами, которые она ставит.

Концепция развития математического образования, принятая Правительством России в декабре 2013 года, предполагает модернизацию содержания школьных учебных программ с опорой на действительные образовательные запросы учащихся, исходя из потребностей общества в математической грамотности. Важнейшую роль в решении этой задачи играют статистика и теория вероятностей, как разделы математики, непосредственно применимые в повседневной практической деятельности человека.

Учебное пособие удовлетворяет образовательным стандартам по математике, включая ФГОС нового поколения.

Разумные представления о случайности и закономерности помогают понять окружающие нас массовые явления и ориентироваться в них. Многие области жизни современного общества — связь, перевозки, обеспечение товарами, образование, медицина — требуют вероятностной культуры от всех, хотя большинство из нас, казалось бы, просто пользуется предоставляемыми услугами. Вероятностная культура нужна и для того, чтобы принимать осознанные решения, связанные со страхованием, медицинским обслуживанием, банковскими вкладами, кредитами и прочим.

Вероятностные представления, или представления о шансах событий, были у людей всегда. Но как научное знание теория вероятностей начала складываться лишь в XVII веке, так что теория вероятностей — молодая математическая наука. Развиваясь, она перестала быть простым исчислением шансов в игре и стала важным инструментом современной науки. Подобно тому, как геометрия предоставляет теоретическую основу всякому рисунку, теория вероятностей стала теоретической базой любого объективного статистического исследования.

В этой книге мы предлагаем свой взгляд на то, какими должны быть школьная вероятность и статистика. Основная цель — дать читателю средства для разумного и сознательного отношения к случайности. Математической формализации изложения мы уделяли значительно меньше внимания. Например, среди многих фактов, которые обнаруживаются и используются для решения задач, далеко не все приводятся с доказательствами. Дело не только в том, что полные доказательства многих вероятностных теорем требуют знаний, выходящих за пределы школы. Важнее другое — ясную вероятностную идею мы не хотели заслонять техническими выкладками.

Содержание

Книга написана в полном соответствии с действующим стандартом математического образования. Книга самодостаточна, хотя и является развитием и продолжением учебника тех же авторов по теории вероятностей для основной школы. Первые две главы посвящены повторению фактов и задач, подробно рассмотренных в учебнике для основной школы. События, вероятности событий в случайных опытах с равновозможными исходами, операции с событиями — все это в настоящей книге изложено более сжато, но не менее полно, чем в предыдущем учебнике. Главы VIII «Комбинаторика» и IX «Испытания Бернулли и биномиальное распределение» также повторяют материал предыдущей книги.

Принципиально новый материал изложен в главе III «Условная вероятность», а также в главах IV—VI, посвященных дискретным случайным величинам и распределениям. Эти главы и глава X «Закон больших чисел» являются центральными. Частично закон больших чисел обсуждался в учебнике для основной школы, но здесь материал изложен подробно и систематически. Темы, связанные со случайными величинами и законом больших чисел, на наш взгляд, наиболее важны.

Глава X, пожалуй, самая «математизированная». Однако вторая часть главы содержит общие описания измерения вероятностей и выборочного метода, которые являются общезначимыми и элементами многих статистических исследований.

В главах XI—XIII рассказывается о непрерывных распределениях, в том числе — о плотности вероятности. Специально рассказано о двух важных непрерывных распределениях: нормальном (особо важно) и показательном. Много внимания уделяется объяснению роли случайных величин, распределенных по этим законам в окружающем мире. Глава XIV даёт представление о методе наименьших квадратов и о корреляции выборочных данных.

Задачи

Каждая глава снабжена подборкой задач. Наиболее важные и значимые разделы содержат много задач. В главах, посвященных частным темам, задач меньше. Мы старались включать в книгу лишь наиболее важные типы задач. Вместе с основным текстом они помогают учащемуся сформировать верные представления о предмете.

Задачи, решение которых требует несколько более высокой математической и вероятностной культуры, чем предполагается базовым уровнем, выделены звездочками.

Главы X и XIV вообще не содержат задач. Требуется накопление методического опыта, который покажет, какие именно задачи следует включать в главы о непрерывных случайных величинах, линейной регрессии и корреляции.

В конце книги помещены задачи для повторения, которые учитель может использовать для компоновки проверочных и самостоятельных работ по темам. Кроме подборки задач по темам, предложены две примерные контрольные работы по пройденным темам и итоговая контрольная работа.

Обратная связь

Конкретизация содержания школьной вероятности и статистики на всех уровнях математической подготовки требует времени, изучения и накопления методического опыта. Поэтому материал данного пособия с избытком покрывает требования образовательного стандарта и может быть использован в учебном планировании на разных уровнях требований.

Мы будем признательны за отклики, замечания и предложения по совершенствованию курса теории вероятностей и статистики в школе и наших книг. Наш адрес: 119002, Москва, Большой Власьевский пер.,11, МЦНМО. Теория вероятностей. Сайт: `http://ptlab.mccme.ru`.

Условные обозначения

 — материал, который важно помнить

 — примеры

 — упражнения

354* — задача повышенной трудности

Выборка — новый термин, название или важное утверждение

◄ — конец доказательства утверждения

Глава I

Случайные события и вероятность (повторение основных понятий)

§ 1. Случайные эксперименты и случайные события

1.1. Случайный эксперимент

Теория вероятностей — математическая наука, которая описывает и изучает случайные явления. Случайными явлениями называют те, окончание или результат которых невозможно предсказать заранее. Но часто можно указать их возможные окончания. Можно даже говорить о ***вероятности***, с которой может наступить тот или иной результат.

Знание вероятности случайного события даёт нам возможность принимать обоснованные решения. Поясним на примере. Если вероятность землетрясения в некоторой местности велика, то строить здания следует по специальным проектам. Сейсмостойкое строительство намного дороже, чем обыкновенное, но в случае катастрофы дополнительные расходы оправдывают себя. Однако если опасность землетрясения пренебрежимо мала, то сейсмостойкое строительство не имеет преимуществ перед обычным, и тогда дополнительные расходы напрасны.

Понятию вероятности можно придать математическую форму. Тогда случайные явления станут объектами точной науки. Начинается этот путь с понятия ***случайного эксперимента***, или ***случайного опыта***.

Само слово «эксперимент» обычно означает сознательные действия какого-то лица. Мы же будем употреблять это слово в широком смысле и говорить о случайных экспериментах, даже когда речь идёт о случайных процессах в природе или обществе.

Примеры случайных экспериментов, проводимых человеком:

— выбор объекта для обследования в социологических, медицинских и других исследованиях или при контроле качества продукции;

— измерение какой-либо величины, скажем срока жизни изделия или расстояния, которое сможет проехать автомобиль на десяти литрах бензина;

— бросание жребия, например игральной кости или монеты;

Примеры природных и социальных случайных явлений, в которых велика доля случая (случайных экспериментов в нашем смысле):

— формирование погоды в определённое время в определённом месте;

— землетрясения, извержения вулканов, лесные пожары или наводнения;

— социальные или экономические процессы: рождаемость и смертность, занятость населения, показатели инфляции, цен и т. д.

В этой учебной книге мы, однако, будем говорить о гораздо более простых случайных опытах.

1.2. Множество элементарных событий

Математическое описание случайного эксперимента включает описание всех элементарных событий и их вероятностей.

Обсуждая случайный эксперимент, прежде всего надо указать ***множество*** всех его ***элементарных событий***, или ***элементарных исходов.*** Это совокупность неделимых на составные части, простейших событий, которыми может заканчиваться этот эксперимент.

В простых опытах выделить элементарные события несложно.

Пример 1. В опыте с бросанием монеты элементарными событиями считают выпадение орла и выпадение решки.

Пример 2. В случайном эксперименте с бросанием игральной кости элементарными событиями являются числа на гранях кубика.

Пример 3. Рассмотрим случайный эксперимент, в котором монета подбрасывается дважды. Одним элементарным событием в этом эксперименте будет выступать, например, пара (орёл, орёл), где первый орёл есть результат первого броска, а второй орёл — второго броска.

Множество элементарных исходов этого эксперимента состоит из четырёх пар:

ОО — (орёл, орёл) ОР — (орёл, решка) РО — (решка, орёл) РР — (решка, решка)

Пример 4. Пять мальчиков: Алексей, Иван, Владимир, Пётр и Юрий — тянут жребий, чтобы определить, кому достанутся два билета на концерт. Будем считать элементарным событием такого эксперимента тех двух мальчиков, которым достанутся билеты. При этом не важно, кто первым вытащил билет.

Элементарные события в таком эксперименте могут быть записаны, например, так:

(Пётр, Иван), (Владимир, Алексей), (Пётр, Юрий) и т. д.

При этом порядок не важен. Поэтому записи (Пётр, Иван) и (Иван, Пётр) означают одно и то же элементарное событие.

Число элементарных событий в этом опыте можно найти. Сначала выпишем все пары, включающие Алексея. Так как порядок имён не важен, первым запишем Алексея. Таких пар всего четыре:

(Алексей, Иван), (Алексей, Владимир), (Алексей, Пётр), (Алексей, Юрий).

Теперь выпишем пары, в которых есть Иван, но нет Алексея (пары с Алексеем уже выписаны). Получаем ещё три пары:

(Иван, Владимир), (Иван, Пётр), (Иван, Юрий).

Дальше выпишем пары с Владимиром, но без Ивана и Алексея. Их две:

(Владимир, Пётр), (Владимир, Юрий).

Наконец, остаётся последняя пара (Пётр, Юрий).

Таким образом, общее число пар равно

$$4+3+2+1=10.$$

Это число различных способов, которыми можно выбрать два объекта из имеющихся пяти. (В дальнейшем мы обсудим и общую такую задачу.)

Пример 5. Рассмотрим случайный эксперимент, состоящий в стрельбе по мишени до первого попадания. Обозначим попадание в мишень П, а промах Н. Тогда элементарные исходы этого эксперимента можно записать в виде последовательностей букв Н и П:

П, НП, ННП, НННП и т. д.

Множество элементарных событий в этом эксперименте бесконечно. Но всё же элементарные события можно пронумеровать. Такие бесконечные множества элементарных событий называют ***счётными***.

Пример 6. Рассмотрим случайный эксперимент, в котором новую электрическую лампочку включают и не выключают, пока она не перегорит. Заранее предсказать время работы лампочки невозможно, хотя рано или поздно она перегорит. Теоретически длительность работы лампочки может быть любой. Значит, в этом опыте множество элементарных событий — числовой луч. В отличие от предыдущего примера, здесь невозможно пронумеровать все элементарные исходы — они заполняют числовой промежуток.

Упражнения

1. Опишите элементарные события в эксперименте, когда игральную кость бросают дважды. Сколько всего элементарных событий в этом эксперименте?

2. Опишите элементарные события в эксперименте, когда монету бросают трижды. Сколько элементарных событий в этом эксперименте?

3. В социологическом опросе случайно отобранному респонденту задают два вопроса. При этом на первый вопрос есть два варианта ответа, а на второй — пять вариантов. Опишите элементарные события этого эксперимента. Сколько всего существует различных способов заполнения такой анкеты?

4. В классе 25 учащихся, 10 из них юноши. Для образования команды, состоящей из одного юноши и одной девушки, учащиеся тянут жребии (отдельно среди юношей и среди девушек). Что является элементарным событием в этом эксперименте? Сколько всего элементарных событий в этом эксперименте?

5. Пять игроков баскетбольной команды по жребию распределяют между собой нагрудные номера от 1 до 5. Опишите элементарные исходы этого эксперимента.

6. Предприятие выпускает в день 100 деталей. Для выяснения качества продукции случайно выбирают две из них для подробного обследования. Опишите одно элементарное событие в таком эксперименте. Важен ли порядок, в котором были выбраны детали? Сколько всего элементарных событий возможно в таком эксперименте?

7. Рассмотрим ситуацию, в которой нас интересует, попадёт ли машина в аварию в течение года. Можно ли описывать эту ситуацию с помощью случайного эксперимента? Какие элементарные исходы возможны в этом случайном эксперименте?

8. Возьмём первую попавшуюся в руки книгу и взвесим её. Опишите возможное пространство элементарных исходов этого эксперимента. Можем ли мы пересчитать (пронумеровать) все возможные исходы этого эксперимента?

9. Игральную кость бросают трижды. Сколько элементарных исходов в этом случайном эксперименте?

10. Монету подбрасывают 10 раз. Сколько элементарных исходов в этом случайном эксперименте?

1.3. Дискретные и непрерывные множества элементарных событий

В перечисленных выше случайных экспериментах мы встретились с двумя типами множеств элементарных событий.

Первый тип (бросание монеты или игральной кости, стрельба до попадания): множество элементарных событий конечно либо счётно. Про такие эксперименты говорят, что их множество элементарных событий дискретно.

Множество элементарных событий называется ***дискретным***, если оно конечно или счётно[1].

Второй тип: элементарное событие описывается точкой на числовой прямой или отрезке (время безотказной работы лампочки, температура воздуха, расстояние между точками, масса тела). В этих экспериментах множество элементарных событий ***непрерывно***.

В ближайшее время мы будем обсуждать только эксперименты с дискретными множествами элементарных событий.

Упражнения

11. В конце дня выборов производится подсчёт голосов избирателей, проголосовавших за определённого кандидата. Этот подсчёт можно рассматривать как случайный эксперимент. Какое множество элементарных событий — дискретное или непрерывное — в этом эксперименте?

12. Измерение температуры воздуха с помощью обычного спиртового термометра — случайный опыт. Какое множество элементарных событий — дискретное или непрерывное — возникает в этом эксперименте?

13. Какое множество элементарных исходов — дискретное или непрерывное — в опыте с измерением срока службы мобильного телефона?

14. Рассмотрим случайный эксперимент, связанный с поиском некоторого редкого вредного вещества в пробах воздуха. Эксперимент проводится до тех пор, пока в очередной пробе воздуха не будет обнаружено это вещество. Запишите несколько возможных элементарных событий этого эксперимента. Какое множество элементарных событий — дискретное или непрерывное — в этом опыте?

[1] Говорят, что множество счётно, если все его элементы можно пронумеровать.

15. Игральную кость бросают четыре раза. Сколько элементарных исходов в этом случайном эксперименте?

16. Монету подбрасывают 20 раз. Сколько элементарных исходов в этом случайном эксперименте?

17. Психологический тест содержит 10 вопросов с тремя вариантами ответа на каждый вопрос. Опишите элементарный исход этого эксперимента. Сколькими различными способами можно ответить на этот тест?

18. Сколькими способами можно отобрать 5 изделий из 100 для контроля качества? Существен ли в таком отборе порядок, в котором отобраны изделия?

19. Сколькими способами можно отобрать двух мальчиков и трёх девочек из класса, в котором 10 мальчиков и 15 девочек?

20. Из приведённых выше в упражнениях случайных экспериментов укажите несколько экспериментов с дискретными пространствами элементарных событий.

21. Из приведённых выше в упражнениях случайных экспериментов укажите эксперименты с непрерывными пространствами элементарных событий.

1.4. Случайные события

Результаты эксперимента не ограничиваются элементарными событиями. Объединяя элементарные события между собой, мы получаем более сложные (не элементарные, составные) случайные события.

Определение. ***Случайным событием*** называют произвольное подмножество множества элементарных событий.

Говорят, что в случайном эксперименте происходит случайное событие A, если эксперимент заканчивается одним из элементарных событий, принадлежащих (благоприятствующих) событию A.

События будем обозначать прописными (большими) латинскими буквами.

Пример 7. В опыте с бросанием кости можно рассмотреть событие

$$A = \{\text{выпало чётное число очков}\}.$$

Это событие A можно записать формально, перечислив все благоприятствующие ему элементарные события: $A = \{2, 4, 6\}$.

Пример 8. В опыте с бросанием кости рассмотрим событие

$$B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Это событие можно описать словами и даже не одним способом. Сделайте это самостоятельно.

Пример 9. Опыт «стрельба по мишени до первого попадания». В этом опыте мы обозначили попадание П, а промах Н. Тогда элементарные события — последовательности букв Н и П: П, НП, ННП и т. д.

Рассмотрим событие

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \text{потребуется не более пяти выстрелов,} \\ \text{чтобы поразить мишень} \end{array} \right\}.$$

Это событие можно записать перечислением элементарных событий:

$$A = \{\text{П, НП, ННП, НННП, ННННП}\}.$$

Упражнения

22. В случайном эксперименте дважды бросают игральную кость.

а) Запишите все элементарные события, составляющие событие

$$A = \{\text{выпала хотя бы одна шестёрка}\}.$$

Сколько всего элементарных событий содержит событие A?

б) Запишите все элементарные события, составляющие событие

$$B = \{\text{в сумме на двух костях выпало семь очков}\}.$$

Сколько всего элементарных событий содержит событие B?

в) Запишите все элементарные события, составляющие событие

$$C = \left\{ \begin{array}{c} \text{при первом броске выпало чётное число,} \\ \text{а при втором — нечётное} \end{array} \right\}.$$

Сколько всего элементарных событий содержится в событии C?

г) Сформулируйте какое-нибудь случайное событие, в котором ровно три элементарных исхода.

д) Сколько элементарных исходов благоприятствуют событию

$$D = \{\text{в сумме выпало менее 12 очков}\}?$$

23. Пять мальчиков: Иван, Пётр, Алексей, Юрий и Владимир — тянут жребий, чтобы определить, кому достанутся два билета в цирк. Запишите все элементарные события, составляющие событие $A = \{\text{билет достался Ивану}\}$. Сколько элементарных событий благоприятствуют этому событию?

24. В опыте с бросанием кости рассмотрим событие

$$B = \{1, 3, 5\}.$$

Опишите это событие словами.

25. Рассмотрим опыт «стрельба по мишени до первого попадания». Событие

$$A = \left\{ \begin{matrix} \text{мишень поражена первым} \\ \text{или вторым выстрелом} \end{matrix} \right\}$$

можно записать перечислением элементарных событий:

$$A = \{\text{П, НП}\}.$$

Здесь буква Н обозначает промах, а буква П — попадание.

Запишите перечислением элементарных событий следующие события:

а) $B = \left\{ \begin{matrix} \text{потребуется не более трёх выстрелов,} \\ \text{чтобы поразить мишень} \end{matrix} \right\}$;

б) $C = \left\{ \begin{matrix} \text{потребуется от двух до пяти выстрелов,} \\ \text{чтобы поразить мишень} \end{matrix} \right\}$;

в) $D = \left\{ \begin{matrix} \text{потребуется не менее трёх выстрелов,} \\ \text{чтобы поразить мишень} \end{matrix} \right\}$.

26. Рассмотрим опыт «стрельба по мишени до первого попадания». Пусть буква Н обозначает промах, а буква П — попадание. Событие

$$A = \{\text{П, НП}\}$$

можно сформулировать словами:

$$A = \left\{ \begin{matrix} \text{мишень поражена первым} \\ \text{или вторым выстрелом} \end{matrix} \right\}.$$

Сформулируйте словами событие:

а) $E = \{\text{НП, ННП, НННП}\}$;

б) $F = \{\text{П, ННП}\}$;

в) $G = \{\text{НННП, ННННП, НННННП, ...}\}$.

27. В случайном опыте пять раз бросают монету. Буквой О отмечено выпадение орла, буквой Р — решки.

Сформулируйте словами событие:

а) $A = \{\text{ОРОРО}\}$;

б) $B = \{\text{РРООО}\}$;

в) $C = \{\text{РОООО, ОРООО, ООРОО, ОООРО, ООООР}\}$;

г) $D = \{\text{ОООРР, ОООРО, ООООР, ООООО}\}$.

28. Эксперимент состоит в случайном выборе двух цветных карточек из четырёх имеющихся: красной (К), синей (С), зелёной (З) и жёлтой (Ж). При этом порядок выбора не важен.

а) Сформулируйте словами событие

$$A = \{\text{ЖС, СЗ}\}.$$

б) Запишите перечислением элементарных событий событие

$$B = \{\text{зелёная карточка не выбрана}\}.$$

в) Является ли событием этого опыта событие

$$C = \{\text{Ж, СЖК}\}?$$

29. Игральную кость бросают дважды. Если при первом броске выпало a очков, а при втором — b очков, то элементарное событие записывают $(a; b)$. Перечислите все элементарные события, составляющие событие:

а) $A = \{$выпавшие числа отличаются на 2$\}$;

б) $B = \{$сумма очков не меньше 10$\}$.

§ 2. Вероятности событий

2.1. Вероятности элементарных событий

Важной частью описания случайного эксперимента является задание вероятностей элементарных событий. В дискретном случайном эксперименте нужно указать вероятность каждого отдельного элементарного события.

При этом должны соблюдаться два условия.

1. Вероятность элементарного события — неотрицательное число (как правило, положительное).

2. Сумма вероятностей всех элементарных событий опыта равна 1.

Вероятности можно назначать как угодно, лишь бы соблюдались два указанных правила. Но чтобы построения имели прикладное значение, вероятности следует назначать в соответствии с природой случайного опыта. Например, думая о монете, мы склонны считать её симметричной в том смысле, что шансы выпадения обеих сторон одинаковы. По этой причине следует назначить вероятности каждой стороны равными. Так как они равны, а сумма их равна 1, каждая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

По той же причине вероятность каждой грани игральной кости следует положить равной $\frac{1}{6}$. Тогда реализуется наше представление о равных шансах каждой грани и одновременно выполняется требование о том, что сумма всех вероятностей равна 1.

2.2. Вероятности произвольных событий

Мы по-прежнему рассматриваем эксперимент с дискретным множеством элементарных событий.

Как поступить, если нужное нам событие не является элементарным?

Определение. ***Вероятностью*** случайного события A называют сумму вероятностей элементарных событий, составляющих событие A (благоприятствующих событию A).

Для обозначения вероятности обычно используется латинская буква P. Вероятность события A обозначают $\mathrm{P}(A)$.

Пример 10. При бросании одной игральной кости нас может интересовать появление чётного числа очков. Обозначим это случайное событие A.

Это событие не является элементарным, так как его наступлению благоприятствует не одно элементарное событие, а три: 2, 4 и 6. Можно записать

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Тогда вероятность события A найдём как сумму вероятностей этих элементарных событий:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример 11. При трёхкратном бросании монеты нас может интересовать событие $A = \{$выпал ровно один орёл$\}$. Появлению этого случайного события благоприятствуют три элементарных события: ОРР (орёл, решка, решка), РОР (решка, орёл, решка), РРО (решка, решка, орёл). Вероятность каждого из этих элементарных событий равна $\frac{1}{8}$ (по соображениям симметрии).

Тогда $A = \{$ОРР, РОР, РРО$\}$, а вероятность события A равна

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

2.3. Достоверные и невозможные события

Если в случайном эксперименте некоторое событие обязательно наступает, то такое событие называется ***достоверным***. Очевидно, вероятность достоверного события равна единице. Например, достоверным будет событие, которому принадлежат все элементарные события эксперимента[1].

Если вероятность события очень мало отличается от единицы, то мы смело полагаемся на наступление такого ***практически достоверного события***. В жизни мы чаще встречаемся с практически достоверными событиями, чем с достоверными событиями.

Пример 12. Очень редко случается так, что тормоза автомобиля отказывают. Нажимая на тормоз автомобиля, водитель ожидает, что тормоз сработает. Это событие практически достоверное. Если бы мы на это не полагались, то мы бы не ездили на автомобилях.

Событие, которое в случайном эксперименте не может наступить, называют ***невозможным***. Например, невозможным событием является пустое подмножество элементарных событий. Вообще, невозможное событие всегда можно получить как дополнение к достоверному событию.

Возникает вопрос — а нужно ли считать случайными достоверные и невозможные события? Это нужно для того, чтобы производить операции над событиями. Если достоверные и невозможные события не считать случайными, то может получиться так, что пересечение или объединение двух случайных событий вообще не будет являться случайным событием.

Невозможные события не происходят, но в жизни мы иногда сталкиваемся с ***практически невозможными событиями***, то есть событиями, вероятность которых пренебрежимо мала (почти нулевая). На наступление таких событий в однократном опыте мы обычно не рассчитываем.

Из приведённых примеров можно сделать вывод, что человек интуитивно соотносит риски и выгоды, предстоящие ему в том или ином деле. Если бы это было не так, то люди учитывали бы все мыслимые опасности. Никто не ходил бы по улицам (на голову может упасть сосулька или штукатурка). По сельской местности или по лесу тем более никто бы не гулял — там опасностей не меньше. Мы не ездили бы на машинах, не летали бы на самолётах и даже дома не могли бы оставаться безбоязненно. Никто не ел бы мороженое (можно простудиться), не читал бы книг (вдруг заболит голова).

---

[1] Обратное неверно — событие может иметь вероятность 1, но не быть достоверным. Например, при случайном выборе действительного числа из отрезка $[0; 1]$ событие «выбрано не число 0» имеет вероятность 1. Но оно всё же наступает не обязательно — ведь число 0 тоже может быть выбрано. Такие события называют почти достоверными.

Аналогично событие, вероятность которого 0, не обязательно невозможное. В приведённом примере событие «выбрано число 0» не является невозможным, но вероятность его равна нулю. Такое событие называют почти невозможным.

С другой стороны, мало кому приходит в голову перебегать скоростную автомагистраль или зажигать праздничные фейерверки у себя дома — здесь наша интуиция и опыт подсказывают, что опасностью уже нельзя пренебрегать.

В затруднительные ситуации мы часто попадаем тогда, когда наша интуиция даёт неверную оценку вероятности опасности — иногда в силу незнания. Вероятностная интуиция может нас обмануть. Простой пример — на ваш взгляд, какова вероятность того, что среди случайно выбранных 25 человек найдутся двое, у которых день рождения совпадает? Вероятность этого кажется намного меньше, чем она есть на самом деле.

У некоторых людей искажённая оценка рисков и выгод приобретает болезненную форму, и тогда могут развиться фобии — психические особенности, связанные с непреодолимой боязнью чего-то, что другим людям представляется совершенно невероятным или нестрашным.

Упражнение

30. Герой фантастического романа А. и Б. Стругацких «Понедельник начинается в субботу» обнаруживает, что разные попугаи очень похожи и даже окольцованы одинаковыми кольцами с одинаковыми номерами, но одни из них умерли раньше, чем появились другие.

> *«Всё происходящее, рассуждал я, по-настоящему удивительно, только если считать, что эти три или четыре попугая — один и тот же попугай. Они действительно так похожи друг на друга, что вначале я был введён в заблуждение. Это естественно. Я математик, я уважаю числа, и совпадение номеров — в особенности шестизначных — для меня автоматически ассоциируется с совпадением пронумерованных предметов».*

Объясните своими словами, что имеет в виду математик, когда говорит, что совпадение шестизначных номеров автоматически наводит на мысль о совпадении предметов.

2.4. Принцип равновозможности

Определение вероятностей в дискретных пространствах часто опирается на ***принцип равновозможности***, который можно сформулировать так: если шансы нескольких элементарных событий в опыте одинаковы, то таким событиям присваивают одинаковые вероятности. Такие элементарные события называют равновозможными. Часто основанием для этого служат соображения симметрии.

Если в случайном опыте всего N элементарных событий и все они равновозможны, то вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{N}$. На заре теории вероятностей учёные рассматривали только такие опыты — с равновозможными элементарными событиями.

Пример 13. При бросаниях игральной кости мы считаем, что все грани кости имеют равные шансы, то есть равновозможны. Это пример эксперимента с равновозможными исходами.

Как правило, равновозможные исходы возникают при жеребьёвках и играх. Именно поэтому толчок к возникновению теории вероятностей дали задачи про карточные и другие игры. В настоящее время теория вероятностей далеко ушла от определения шансов игроков или исчисления выигрышей. Она проникла во все сферы жизни и науки современного общества.

Но почему же тогда мы всё время обращаемся к монете и к игральной кости? Дело в том, что классические модели теории вероятностей — монета, игральная кость и т. п. — это инструменты, подобные циркулю и линейке в геометрии. Бросая монеты и кости (или просто воображая эти броски), мы можем постичь вероятностные законы, действие которых выходит далеко за рамки игровых опытов. Простые модели позволяют нам имитировать опыты и события, которые трудно, нежелательно или вовсе невозможно воспроизвести в реальной жизни.

Но и в жизни встречаются эксперименты, где очень важно обеспечить принцип равновозможности. Например, в выборочных исследованиях, когда изучаются большие совокупности объектов, равновозможность играет ключевую роль. Для исследования всей совокупности из неё выбирают часть — ***выборку***. Выборка должна правильно представлять целое. Для этого нет лучшего способа, как формировать выборку ***случайным выбором.*** При этом важно, чтобы у всех объектов совокупности были одинаковые шансы попасть в эту выборку. Выборочные методы сейчас используются широко. Про социологические обследования вы, вероятно, слышали. Помимо социологии, выборочные обследования применяются и в других областях. Выборочный метод важен при контроле массовой продукции. Можно сказать, что выборочный метод полезен всюду, где изучаются большие совокупности.

Более подробно выборочный метод мы обсудим в главе X (с. 157).

2.5. Вероятности событий в опытах с равновозможными элементарными исходами

Рассмотрим опыт с конечным множеством элементарных событий. Если все элементарные события равновозможны, то из определения вероятности события получается простое правило вычисления вероятностей:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N},$$

где N — общее число элементарных событий опыта, а $N(A)$ — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Пример 14. Среди 10 человек разыгрывается 6 призов. Обычно в таком случае заготавливают 10 бумажек, на шести из них пишут слово «ПРИЗ». Бумажки кладут в шапку, перемешивают, и все по очереди достают по одной бумажке наудачу. Такой способ вероятностного дележа применяется с незапамятных времён. Представьте, что вы один из этих десятерых. Какова вероятность того, что вам достанется один из призов?

Решение. Элементарные исходы — бумажки. Всего их $N = 10$. Событию

$$A = \{\text{вам достался приз}\}$$

благоприятствует $N(A) = 6$ исходов. Значит,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Упражнения

31. Правильную игральную кость бросили один раз. Какова вероятность того, что на ней выпало число очков, кратное 3?

32. Правильную игральную кость бросили дважды.

а) Какова вероятность того, что оба раза выпадет одно и то же число?

б) Какова вероятность того, что в сумме выпадет 10 очков?

в) Какова вероятность того, что частное от деления числа очков при первом броске на число очков при втором броске окажется целым числом?

33. Пользуясь принципом равновозможности, найдите вероятность одного элементарного исхода в опыте, в котором монету бросают:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 8 раз; г) 10 раз; д) n раз.

34. Пользуясь принципом равновозможности, найдите вероятность одного элементарного исхода в опыте, в котором игральную кость бросают:

а) дважды; б) трижды; в) четыре раза.

35. Правильную монету бросили 10 раз. Какова вероятность того, что в результате выпадет ровно один орёл?

36. В классе 25 учащихся, из них 16 девочек. Какова вероятность того, что случайно выбранный учащийся будет мальчиком?

37. В таблице дана численность населения в 12 крупнейших городах России по данным переписи 2010 года.

По данным Всероссийской переписи населения 2010 года, тыс. жителей	
Москва	11 514,3
Санкт-Петербург	4848,7
Новосибирск	1473,7
Екатеринбург	1350,1
Нижний Новгород	1250,6
Самара	1164,9
Омск	1154,0
Казань	1143,6
Челябинск	1130,3
Ростов-на-Дону	1089,9
Уфа	1062,3
Волгоград	1021,2

Какова вероятность того, что население города, случайно выбранного из этого списка:

а) превысит четыре миллиона человек;

б) не превысит полутора миллионов;

в) будет находиться в интервале от одного миллиона ста тысяч до двух миллионов?

38. В случайном эксперименте правильную монету подбрасывают десять раз. Мы считаем, что все элементарные события этого эксперимента равновозможны. Какова вероятность того, что будет выброшено:

а) десять орлов; б) девять орлов?

39. В классе 25 человек, из них 10 мальчиков. Случайным образом из класса отбирают 5 человек, при этом порядок выбора неважен.

а) Сколько всего элементарных событий возможно в этом эксперименте?

б) Какова вероятность того, что среди отобранных будут только мальчики?

в) Какова вероятность того, что среди отобранных будут только девочки?

г) Какова вероятность того, что среди отобранных будет ровно два мальчика?

Решение. а) Выбрать 5 человек из 25 можно C_{25}^{5} способами.

б) Выбрать 5 человек из 10 можно C_{10}^{5} способами.

Поэтому вероятность события «среди отобранных только мальчики» равна

$$\frac{C_{10}^{5}}{C_{25}^{5}} \approx 0{,}005.$$

г) Выбрать двух мальчика и трёх девочек можно $C_{10}^2 \cdot C_{15}^3$ способами. Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{C_{10}^2 \cdot C_{15}^3}{C_{25}^5} \approx 0{,}385.$$

40. Из десяти деталей две бракованные. Для проверки качества деталей случайным образом отбираются три детали. Какова вероятность того, что среди них

а) не будет ни одной бракованной детали;

б) будет одна бракованная деталь; две бракованные детали?

Можно ли считать, что такой способ проверки обеспечивает хорошее представление о проценте брака в партии деталей?

41. В России 12 городов с населением более 1 млн человек (по данным переписи 2010 г.): Москва, Санкт-Петербург, Самара, Екатеринбург, Ростов-на-Дону, Нижний Новгород, Новосибирск, Волгоград, Казань, Челябинск, Омск и Уфа (см. таблицу на с. 20). Социологи решили случайным образом отобрать 6 из них для обследования. Какова вероятность того, что среди отобранных городов будут одновременно Москва и Санкт-Петербург.

42. Список вопросов для подготовки к экзамену включат 16 тем. Учащийся выучил ровно половину из них. В экзаменационный билет случайным образом отбирают две темы. Какова вероятность того, что учащемуся достанется билет с двумя невыученными темами?

43. На столе шесть монет — четыре из них по рублю, а ещё две — по пять рублей. Саша, не глядя, забрал со стола какие-то три монеты, а оставшиеся три монеты забрал Володя. Найдите вероятность того, что:

а) обе пятирублевые монеты вместе оказались у одного из мальчиков;

б) обе пятирублевые монеты вместе оказались у Саши;

б) одна пятирублевая монета оказались у Саши, а вторая — у Володи.

44. В классе 21 человек. Среди них Маша и Лена. Класс случайным образом разбивают на три одинаковые по численности группы. Найдите вероятность того, что Маша и Лена окажутся:

а) в одной группе (неважно, в какой);

б) вместе в первой группе;

в) в разных группах.

45. Из натуральных чисел от 1 до 10 случайным образом последовательно выбирают три числа. Найдите вероятность того, что

а) сначала будет выбрано число 3, затем — число 7, и последним — число 1;

б) будут выбраны числа 1, 3 и 7 (неважно, в каком порядке).

2.6. Простой случайный выбор

Простой случайный выбор можно осуществить последовательно, подряд идущими шагами. На каждом шаге из имеющейся совокупности наудачу выбираем один объект. Слово «наудачу» означает, что в этот момент у всех объектов равные шансы быть выбранными.

После первого объекта мы из оставшихся наудачу выбираем второй объект и так далее, пока не получим выборку нужной нам численности (***объёма***). Таким способом можно сформировать огромное число различных выборок, и все они равновероятны.

Пример 15. Сколько рыбы в пруду? Неизвестную численность рыбы можно оценить с помощью выборочного исследования.

Опишем ***метод двойного отлова***. Пусть N обозначает число рыб в водоёме. Производится отлов. Предположим, что поймано n рыб. Этих рыб нужно пометить и отпустить в водоём. Через некоторое время производится вторичный отлов. Предположим, что во второй раз выловлено M рыб и среди них m оказалось помеченными. Тогда число рыб в совокупности N можно найти из приближённого равенства

$$\frac{N}{n} \approx \frac{M}{m}, \quad \text{откуда } N \approx \frac{nM}{m}.$$

Разумеется, это приближённый метод.

На идее случайного выбора основаны и более сложные схемы, позволяющие улучшить оценку в вероятностном смысле, то есть уменьшить вероятность большой ошибки.

Описанный метод применим не только для оценки численности популяции рыб. Многочисленные варианты метода двойного случайного выбора применяются и в других науках, когда требуется дать оценку численности совокупности.

2.7. Задача о справедливом разделе ставки

В заключение этого параграфа мы расскажем про знаменитую задачу о справедливом разделе ставки в неоконченной игре. В XVII веке её много обсуждали. Ставки тогда были денежными, но у нас ставкой будет торт.

Задача. Игроки A и B играют в шахматы матч до пяти побед (выигрывает тот, кто первым одержит пять побед). Ничьи не в счёт. Приз победителю — торт. Силы соперников равны. По некоторой причине игру пришлось прекратить, когда счёт был 3 : 2 в пользу А. Игроки хотят разделить торт в таком отношении, в каком находятся вероятности их выигрышей[1]. Как нужно делить?

Решение. До победы игроку А осталось выиграть две партии, а игроку В надо выиграть три партии. Если бы игроки продолжили игру, то могло бы состояться ещё не более четырёх результативных партий (подумайте почему).

Мысленно позволим соперникам сыграть ещё ровно четыре партии, даже если один из них уже победил. Продолжение игры этого результата изменить не сможет. Результаты дополнительных четырёх партий запишем в виде последовательности букв. Если выигрывает А, то пишем букву А. Если выигрывает В, то пишем В. Например, AABA.

Вероятности появления букв А и В в этой последовательности одинаковы (силы игроков равны), а всего букв четыре. Поэтому вероятность каждой такой последовательности равна $\frac{1}{16}$. Осталось понять, сколько последовательностей приводят к победе А, а сколько — к победе В.

Побеждает А, если в последовательности встречается не менее чем две буквы А. Таких последовательностей ровно одиннадцать:

AAAA (четыре буквы А),

AAAB, AABA, ABAA и BAAA (три буквы А),

AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA и BBAA (две буквы А).

Пять последовательностей благоприятствуют победе игрока В:

BBBB,

BBBA, BBAB, BABB и ABBB.

Поэтому вероятности выигрышей А и В равны соответственно $\frac{11}{16}$ и $\frac{5}{16}$.

Ответ: призовой торт надо делить в отношении 11 : 5.

[1] То есть каждому должна достаться доля, равная вероятности его выигрыша, который мог бы наступить, если бы игра не была прервана.

Блез Паскаль

Пьер Ферма

Считается, что это одна из задач, положивших начало теории вероятностей. Поиск решения занял длительное время у разных учёных и любителей математики. Вероятно, впервые задачу независимо друг от друга разными способами решили Пьер Ферма[1] и Блез Паскаль[2]. Разумеется, они решали задачу не с конкретными числами, а в общем виде. Их рассуждения отличались, но оба остались довольны друг другом. Вот фрагмент из письма Паскаля к Ферма, написанного в 1651 году:

«*Дорогой господин Ферма! Мной овладело нетерпение, и, хотя я всё ещё болен, не могу удержаться, чтобы не взять перо и не сообщить, что вчера г-н Каркави передал мне Ваше письмо о справедливом разделе ставки, которое привело меня в полный восторг. Скажу без долгих вступлений: Вы верно решили задачу о костях и о справедливом разделе. Для меня это большая радость, поскольку теперь, когда мы получили изумительно одинаковые результаты, я больше не сомневаюсь в своей правоте*».

§ 3. Близость частоты и вероятности

3.1. Частотный метод определения вероятности

Как правило, в реальных экспериментах несложно указать множество элементарных событий, но правильно назначить вероятности случайных событий

[1] Пьер Ферма (1601—1665). По профессии юрист, по призванию — математик. Интересовался самыми разными математическими задачами, многие из которых стали впоследствии получили его имя.

[2] Блез Паскаль (1623—1662). Физик, математик и философ. Известно, что задачу о справедливом разделе ставки наряду с некоторыми другими задачами предложил большой любитель игры кавалер де Мере (впрочем, сам де Мере её не решил). Многие считают, что в переписке Ферма с Паскалем по поводу задач де Мере появилась на свет теория вероятностей.

бывает трудно или даже невозможно. В таких случаях вместо точных вероятностей приходится пользоваться их приближёнными значениями — оценками. Для оценки вероятности событий используют частоты этих событий в серии повторных опытов. Частотный метод опирается на то, что частота события сближается с его вероятностью при увеличении числа экспериментов.

Пусть проводится серия из N случайных экспериментов. Обозначим через $N(A)$ число тех экспериментов, в которых случилось событие A. Тогда

$$\frac{N(A)}{N} \approx \mathrm{P}(A).$$

Поэтому ***в качестве оценки неизвестной вероятности берут частоту события A***. Чем больше число экспериментов N, тем, скорее всего, ближе друг к другу числа $\frac{N(A)}{N}$ и $\mathrm{P}(A)$. Частотный метод приходится использовать для оценки вероятности во многих практических задачах.

Частотный метод имеет свои недостатки. Главный недостаток — в каждой новой серии частота своя — она меняется, будучи случайной величиной. Но чем длиннее серия экспериментов, тем частоты устойчивее. Важный факт: с ростом числа N частота приближается к вероятности.

Сейчас мы не можем этого доказать, но подтвердим с помощью эксперимента, который можно провести в форме лабораторной работы.

3.2. Краткое описание эксперимента

Цель эксперимента — убедиться на практике, что с ростом числа одинаковых опытов частота события, скорее всего, приближается к вероятности этого события.

Методика проведения эксперимента. В ходе эксперимента производится $N = 1000$ бросаний монеты. Через каждые 50 бросаний подсчитывается частота события $A = \{\text{выпал орёл}\}$. Результат отмечается на графике частоты (для наглядности точки соединены непрерывной линией).

Мы провели этот эксперимент три раза. Графики изображены на рис. 1 *а—в*.

Обратите внимание — на трёх представленных рисунках графики частоты постепенно приближаются к прямой $y = 0{,}5$, хотя и испытывают колебания. К концу каждого из трёх опытов частота отличается от 0,5 меньше чем на 0,02. Всегда ли будет так? Конечно, нет, но весьма часто (при $N = 1000$ примерно 79 % случаев дадут отличие менее чем 0,02). Чем больше N, тем лучше согласие. Именно а)

б)

в)

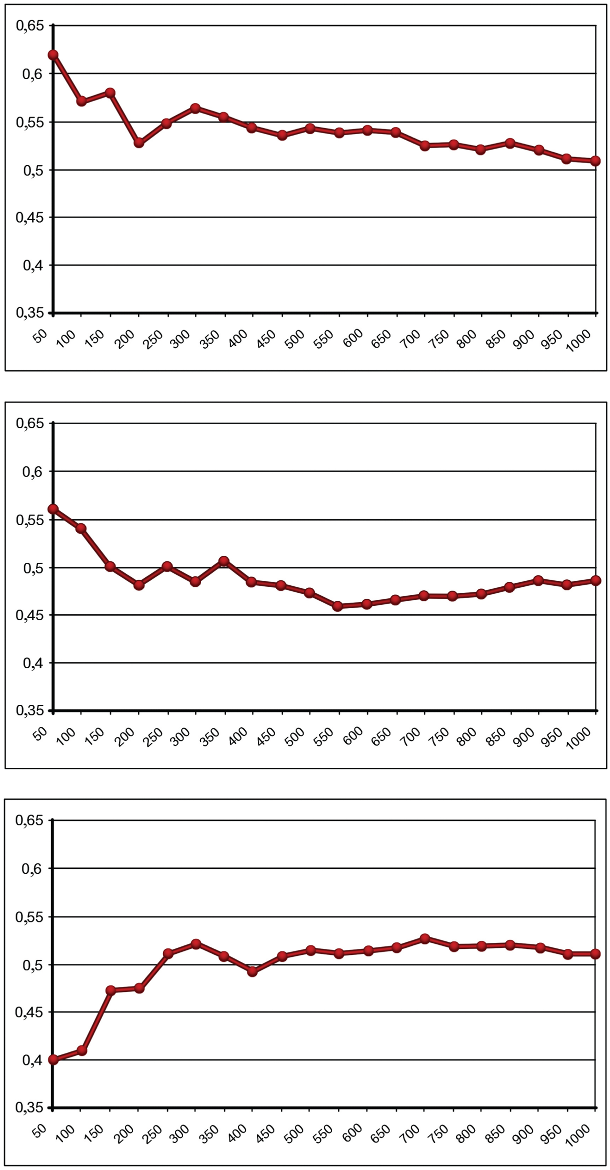

0,65
0,6
0,55
0,5
0,45
0,4
0,35
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750 800 850 900 950 1000
0,65
0,6
0,55
0,5
0,45
0,4
0,35
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750 800 850 900 950 1000
0,65
0,6
0,55
0,5
0,45
0,4
0,35
50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550 600 650 700 750 800 850 900 950 1000

Рис. 1

в этом смысле мы говорим, что при большом числе испытаний частота близка к вероятности.

Повторим: это можно доказать, но сейчас наша задача — только убедиться в этом на практике.

Упражнения

46. При выполнении контрольного задания учащийся может получить одну из четырёх отметок. Вероятность получить «неудовлетворительно» равна 0,1, вероятность получить «удовлетворительно» — 0,2, вероятность получить «хорошо» — 0,3, четвёртая возможная отметка — «отлично». Какова вероятность того, что учащийся получит хорошую или отличную отметку?

47. В течение года с автомобилем может произойти одно из трёх событий: он не попадёт в аварию, он попадёт в мелкую аварию, он попадёт в серьёзную аварию. Для неопытного водителя в некотором регионе вероятность попадания в мелкую аварию равна 0,1, а вероятность попадания в серьёзную аварию в пять раз меньше. Какова вероятность того, что неопытный водитель не попадёт в аварию в течение года[1]?

48. Для социологического опроса некоторой совокупности людей была составлена случайная выборка из 2000 человек. На вопрос «Нравились ли вам уроки математики в школе?» утвердительно ответило 1178 из них. Пользуясь этими данными, оцените вероятность (найдите приближённое значение вероятности) того, что случайно выбранный из этой совокупности человек утвердительно ответит на тот же вопрос.

49. В двух книжных магазинах был проведён опрос двух случайных выборок покупателей. В первой выборке было 1520 человек, во второй выборке было 580 человек. В первой выборке 623 покупателя утвердительно ответили на вопрос «Читали ли вы хотя бы одно произведение писателя П?». Во второй выборке на этот же вопрос утвердительно ответили 217 человек.

Оцените вероятность того, что случайно выбранный покупатель в книжном магазине утвердительно ответит на этот же вопрос, пользуясь:

а) результатами опроса только первой выборки;

б) результатами опроса только второй выборки;

в) результатами, полученными с использованием объединённой выборки.

По вашему мнению, на какое из полученных чисел лучше полагаться при оценке вероятности указанного события?

---

[1] Подобные вероятности играют важную роль при расчёте стоимости полиса страхования автомобиля.

Глава II

Математическое описание событий

§ 4. Операции с событиями

4.1. Диаграммы Эйлера

Мы рассмотрим три основные операции над случайными событиями: ***пересечение, объединение и переход к противоположному событию.*** По сути это операции над множествами элементарных событий.

Для обозначения множества всех элементарных событий случайного эксперимента будем использовать символ Ω (читается — «омега»)[1]. Как и в первой главе, будем рассматривать дискретные случайные эксперименты.

Операции с двумя или тремя событиями удобно изображать с помощью диаграмм Эйлера. Диаграмма Эйлера со случайными событиями A и B показана на рис. 2.

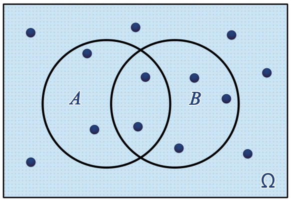


Рис. 2. Прямоугольник изображает множество Ω, круги — события A и B. Точки символически изображают элементарные события эксперимента

4.2. Пересечение событий

Определение. ***Пересечением событий*** A и B называется событие, элементарные исходы которого принадлежат и событию A, и событию B. Пересечение событий A и B обозначается $A \cap B$. Это выражение читается «пересечение A и B» или просто «A и B».

[1] Событие Ω является объединением всех элементарных событий опыта, поэтому оно является достоверным событием. С другой точки зрения можно считать, что событие Ω — это и есть весь случайный эксперимент.

Можно сказать, что пересечение событий — это их общая часть. На диаграмме Эйлера (рис. 3) показаны два события A и B и их пересечение $A \cap B$. На рис. 4 изображена диаграмма для трёх событий A, B и C. Определите по рисунку, сколько элементарных событий благоприятствует событиям $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ и $A \cap B \cap C$.

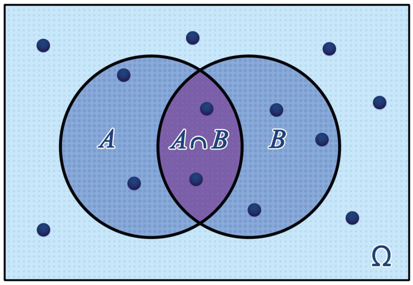


Рис. 3. Событию $A \cap B$ принадлежат те элементарные исходы, которые принадлежат обоим событиям

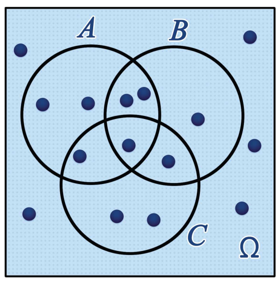


Рис. 4. Диаграмма Эйлера для трёх событий

Если события A и B не имеют общих элементарных исходов, то такие события называются ***непересекающимися*** или ***несовместными***. Пересечение несовместных событий не содержит элементарных событий. Его обозначают символом $\varnothing$ и называют пустым событием. Это событие невозможное; $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

Пример 1. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Рассмотрим следующие события (см. рис. 5):

$$A = \{\text{в сумме выпало менее семи очков}\},$$

$$B = \{\text{выпало одинаковое число очков}\}.$$

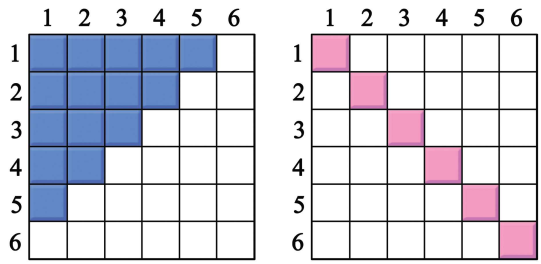


Рис. 5. В строках — результат первого броска, в столбцах — результат второго

Тогда $A \cap B$ — событие, состоящее из исходов $(1; 1)$, $(2; 2)$ и $(3; 3)$. Это хорошо видно, если показать оба события на одном рисунке (см. рис. 6).

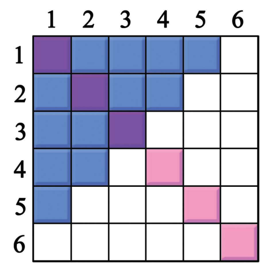


Рис. 6

Чтобы непосредственно найти вероятность пересечения событий A и B, нужно учесть вероятности только тех элементарных исходов, которые принадлежат одновременно обоим событиям. В приведённом примере событие $A \cap B$ состоит из трёх элементарных исходов. Общее число элементарных исходов в опыте 36.

Следовательно, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Упражнения

50. В эксперименте с двукратным бросанием игральной кости укажите какие-нибудь два несовместных события.

51. В случайном эксперименте с выбором одного города России с населением более 1 млн человек (см. таблицу на с. 20) определим события

$$A = \{\text{население города менее 2 млн человек}\},$$

$$B = \{\text{город находится в европейской части России}\}.$$

а) Опишите словами событие $A \cap B$.

б) Какие элементарные события (города) принадлежат событию $A \cap B$?

52. Монету подбрасывают три раза. Рассмотрим случайные события

$$A = \{\text{выпал ровно один орёл}\},$$

$$B = \{\text{в первый раз выпал орёл}\},$$

$$C = \{\text{выпало не менее двух орлов}\}.$$

а) Сформулируйте словами события $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ и найдите их вероятности.

б) Есть ли среди событий A, B, C несовместные?

53. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Рассмотрим события

$$A = \{\text{в первый раз выпало чётное число очков}\},$$
$$B = \{\text{во второй раз выпала пятёрка}\},$$
$$C = \{\text{в сумме на двух костях выпало десять}\}.$$

Сколько элементарных событий входят в события A, B? Выпишите все элементарные события, составляющие событие C. Укажите все элементарные исходы, входящие в пересечения событий A и B, A и C, B и C. Являются ли перечисленные пары событий несовместными? Являются ли несовместными события $A \cap B$ и C? Найдите вероятности событий A, B, C и их пересечений $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

54. В социологическом исследовании случайным образом выбирают респондента для опроса из класса, в котором 12 юношей и 15 девушек. Известно, что из них 4 юноши и 6 девушек учатся на отлично по математике. Пусть событие A означает, что выбран юноша, событие B означает, что выбранный учащийся — отличник, событие C — выбрана девушка-отличница. Сформулируйте словами события $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$. Найдите вероятности событий A, B, C и их пересечений $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

55. Два юноши и две девушки тянут жребий — четыре спички, из которых две короткие и две длинные. Рассмотрим случайные события

$$A = \{\text{хотя бы одна короткая спичка досталась девушке}\},$$
$$B = \{\text{среди тех, кто вытянул короткую спичку, ровно один юноша}\}.$$

а) Сформулируйте словами событие $A \cap B$.

б) Найдите вероятности событий A и $A \cap B$.

4.3. Объединение событий

Определение. ***Объединением событий*** A и B называется событие, элементарные исходы которого принадлежат хотя бы одному из событий A и B. Объединение событий A и B обозначается $A \cup B$. Это выражение читается «объединение A и B» или просто «A или B».

На диаграмме Эйлера (рис. 7) показано событие $A \cup B$.

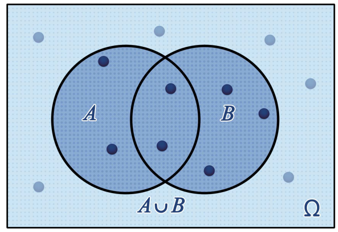


Рис. 7. Объединение событий A и B

Пример 2. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Рассмотрим следующие события:

$$A = \{\text{в сумме выпало менее семи очков}\},$$
$$B = \{\text{выпало одинаковое число очков}\}.$$

Объединением событий A и B будет событие

$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{c} \text{выпало одинаковое число очков или} \\ \text{в сумме выпало менее семи очков} \end{array} \right\}.$$

Элементарные исходы этого события показаны на рис. 8.

Чтобы непосредственно найти вероятность объединения событий A и B, нужно учесть вероятности всех элементарных исходов, принадлежащих хотя бы одному из событий A и B. В приведённом примере событие $A \cup B$ состоит из 18 элементарных исходов. Общее число элементарных исходов в опыте 36.

Следовательно, $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

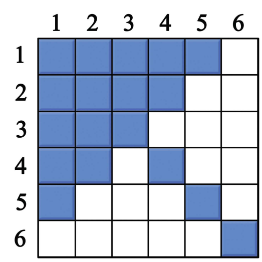


Рис. 8

Упражнения

56. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Рассмотрим события

$A = \{$при каждом броске выпало чётное число очков$\}$,

$B = \{$во второй раз выпала единица$\}$,

$C = \{$в сумме на двух костях выпало меньше пяти очков$\}$.

Пользуясь таблицей этого случайного эксперимента, ответьте на вопросы.

а) Сколько элементарных событий благоприятствует событию A?

б) Сколько элементарных событий благоприятствует событию B?

в) Выпишите все элементарные события, составляющие событие C.

г) Укажите все элементарные события, составляющие объединение событий A и B.

д) Укажите все элементарные события, составляющие объединение событий B и C.

е) Укажите все элементарные события, составляющие объединение событий A и C.

ж) Какие из событий A, B и C являются несовместными?

з) Найдите вероятности событий A, B, C и их объединений $A \cup B$, $A \cup C$ и $B \cup C$.

57. В случайном эксперименте с выбором одного города России с населением более 1 млн человек (см. таблицу на с. 20) определим события

$$A = \{\text{население города менее 2 млн человек}\},$$
$$B = \{\text{город находится в европейской части России}\}.$$

а) Опишите словами событие $A \cup B$.

б) Какие элементарные события принадлежат событию $A \cup B$?

58. В некотором случайном эксперименте рассматривают события A и B. Известно, что $\mathrm{P}(A) = 0{,}6$, а $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$. Могут ли события A и B быть несовместными?

59. В социологическом исследовании случайным образом выбирают респондента для опроса из класса, в котором 12 юношей и 15 девушек. Известно, что из них 4 юноши и 6 девушек учатся на отлично по математике. Пусть событие A — означает, что выбран юноша, событие B — означает, что выбранный учащийся — отличник, событие C — выбрана девушка-отличница. Сформулируйте словами события $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$. Найдите вероятности событий A, B, C и их объединений $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$.

60. В случайном эксперименте бросают одну игральную кость. Найдите вероятность события:

а) выпало чётное число или не менее трёх;

б) выпала единица или больше четырёх;

в) выпало меньше пяти или больше двух.

61. В случайном эксперименте монету бросили четыре раза. Найдите вероятность события:

а) первые два раза выпал орёл или орёл выпал хотя бы три раза;

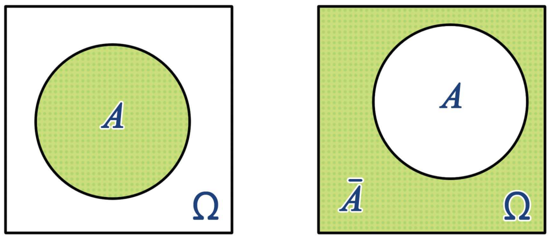
б) орёл выпал не менее трёх раз или решка выпала не менее трёх раз;

в) решка выпала ровно два раза или орёл выпал ровно три раза.

4.4. Противоположное событие

Определение. ***Событие, противоположное событию A,*** — это событие, которое состоит из всех элементарных исходов, не принадлежащих событию A.

Обозначать противоположное событие будем чертой сверху. Например, событие $\overline{A}$ противоположно событию A.



событие A событие $\overline{A}$

Рис. 9. Противоположные события

Говорят, что события A и $\overline{A}$ взаимно противоположны или противоположны друг другу.

Чтобы найти вероятность события $\overline{A}$, нужно учесть только те элементарные исходы опыта, которые не принадлежат событию A. Сумма вероятностей всех элементарных событий опыта равна 1, поэтому

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1.$$

Следовательно, $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

Пример 3. В опыте производится четыре бросания монеты. Найдём вероятность события «хотя бы раз выпал орёл».

Решение. Обозначим нужное событие A. Оно противоположно событию

$$\overline{A} = \{\text{четыре раза выпала решка}\}.$$

Событие $\overline{A}$ наступает при одном исходе (РРРР) из 16 равновозможных исходов. Поэтому $\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{1}{16}$.

Тогда вероятность события «хотя бы раз выпал орёл» равна

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375.$$

Упражнения

62. Докажите, что $\overline{A}\cup A=\Omega$.

63. Докажите, что события A и $\overline{A}$ несовместны: $A\cap\overline{A}=\varnothing$.

64. В случайном эксперименте монету бросили три раза. Рассмотрим события

$$A=\{\text{выпало три орла}\},$$
$$B=\{\text{в первый раз выпал орёл}\},$$
$$C=\{\text{выпало хотя бы два орла}\}.$$

Сформулируйте противоположные события.

65. В классе 20 учащихся, восемь из которых юноши. Случайным образом отбирают двух учащихся. Рассмотрим события

$$A=\{\text{оба выбранных — юноши}\},$$
$$B=\{\text{среди выбранных ровно одна девушка}\},$$
$$C=\{\text{среди выбранных нет юношей}\}.$$

Есть ли среди этих событий взаимно противоположные? Сформулируйте событие $\overline{B}$.

66. В социологическом исследовании случайным образом отбираются респонденты для опроса. Исследователей часто интересуют мнения не только всех обследуемых, но и отдельных групп. Рассмотрим события

$$A=\{\text{выбран мужчина}\},$$
$$B=\{\text{выбран житель города}\},$$
$$C=\{\text{выбран пенсионер}\}.$$

Сформулируйте описания следующих событий:

а) $A\cap\overline{B}$; б) $\overline{A}\cap B$; в) $A\cap B\cap\overline{C}$; г) $\overline{A\cup B}\cap C$.

67. В коробке 6 красных и 4 синих фломастера. Случайным образом из них выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что:

а) будет выбран хотя бы один синий фломастер;

б) будет выбран хотя бы один красный фломастер.

68. В группе 11 мужчин и 9 женщин. Для психологического теста случайным образом выбирают трёх человек из этой группы. Найдите вероятность того, что:

а) в число выбранных войдёт хотя бы одна женщина;

б) в число выбранных войдёт хотя бы один мужчина.

69. Игральную кость бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что хотя бы один раз выпала шестёрка.

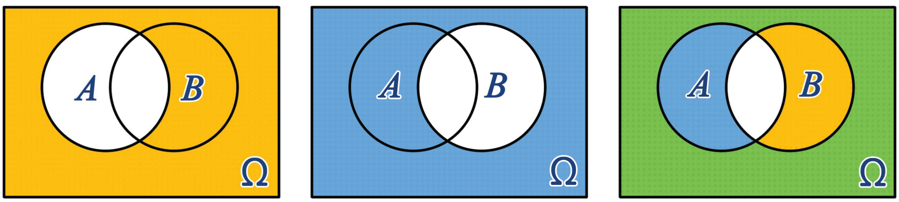
4.5. Применение диаграмм Эйлера для проверки совпадения событий

С помощью диаграмм Эйлера удобно проверять совпадения событий и доказывать тождества.

Пример 4. Докажем равенство

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}.$$

Доказательство. Изобразим диаграмму для $\overline{A} \cap \overline{B}$. Отметим $\overline{A}$, затем отметим $\overline{B}$ (см. рис. 10 *а б*), а затем — их общую часть (см. рис. 10 *в*).



а) событие $\overline{A}$ *б*) событие $\overline{B}$ *в*) событие $\overline{A} \cap \overline{B}$

Рис. 10

Теперь построим диаграмму для $\overline{A \cup B}$. Нужно закрасить часть прямоугольника, не входящую в $A \cup B$ (см. рис. 11).

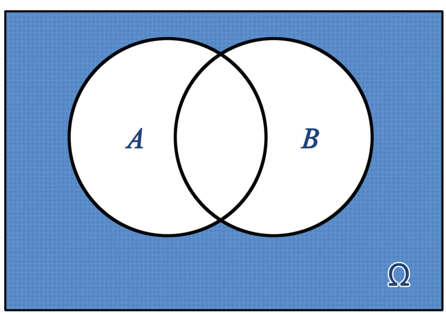


Рис. 11. Событие $\overline{A \cup B}$

Мы видим, что диаграммы для обоих выражений совпали. Значит, равенство верно. ◄

§ 5. Формула сложения вероятностей

5.1. Общая формула сложения

Если сложить вероятности событий A и B, то в эту сумму войдут вероятности всех элементарных событий, составляющих A и B, причём элементарные события, принадлежащие $A \cap B$, встретятся в этой сумме дважды.

Отсюда следует формула

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Справедливость этого равенства становится очевидной, если посмотреть на диаграмму Эйлера (см. рис. 12).

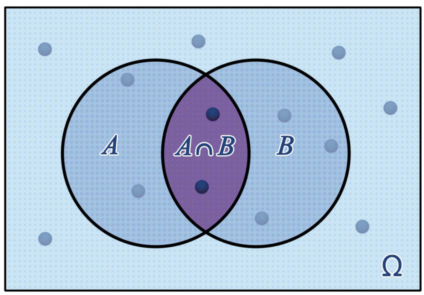


Рис. 12. Иллюстрация к формуле сложения вероятностей

Пример 5. В некотором банке два круглосуточных банкомата. Каждый из них исправно работает ночью с вероятностью 0,8. Вероятность того, что исправно работают оба, равна 0,64. Найдём вероятность того, что нам удастся снять наличные в этом отделении банка (то есть что хотя бы один из банкоматов исправен).

Решение. Определим события

$$A = \{\text{первый банкомат исправен}\},$$
$$B = \{\text{второй банкомат исправен}\}.$$

Тогда

$$A \cap B = \left\{\text{оба банкомата исправны}\right\}.$$

Вероятности этих событий нам известны по условию. Событие $\left\{\text{хотя бы один банкомат исправен}\right\}$ — это событие $A \cup B$. Найдём его вероятность:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}96.$$

5.2. Формула сложения для несовместных событий

Рассмотрим важный частный случай. Если события A и B несовместны, то их пересечение пусто, а поэтому вероятность пересечения равна нулю:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0.$$

Следовательно, для несовместных событий A и B получаем формулу

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

5.3. Обобщение формул на случай трёх событий

Для любых трёх событий A, B и C формула сложения вероятностей принимает вид

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C).$$

Суть формулы: чтобы найти вероятность объединения трёх событий, нужно сложить их вероятности, вычесть вероятности попарных пересечений и добавить вероятность пересечения всех трёх событий.

Выведите эту формулу самостоятельно в качестве упражнения. Для вывода удобно воспользоваться диаграммой Эйлера.

Следствие. *Если события A, B и C попарно несовместны, то*

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C).$$

Упражнения

70. В эксперименте с двукратным бросанием игральной кости укажите какие-нибудь два несовместных события.

71. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Рассмотрим события

$$A = \{\text{при каждом броске выпало чётное число}\},$$
$$B = \{\text{во второй раз выпала единица}\},$$
$$C = \{\text{в сумме на двух костях выпало меньше пяти очков}\}.$$

а) Укажите все элементарные исходы, входящие в $A \cap B$.
б) Укажите все элементарные исходы, входящие в $A \cap C$.
в) Укажите все элементарные исходы, входящие в $B \cap C$.
г) Являются ли какие-нибудь из событий A, B и C несовместными?

72. Событию U в ходе некоторого опыта благоприятствуют пять элементарных событий. Событию V благоприятствуют восемь элементарных событий. Из этих восьми элементарных событий ни одно не благоприятствует событию U. Сколько элементарных событий благоприятствует событию $U \cup V$?

73. Событию A благоприятствуют 8 элементарных событий, а событию B — 10 элементарных событий. Из этих десяти элементарных событий пять благоприятствуют сразу двум событиям. Изобразите соответствующую диаграмму Эйлера и ответьте на вопросы.

а) Сколько элементарных событий благоприятствует событию A, но не благоприятствует событию B?

б) Сколько элементарных событий благоприятствует событию B, но не благоприятствует событию A?

в) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $A \cup B$?

74. Монету бросают дважды. Рассмотрим события

$$A = \{\text{в первый раз выпал орёл}\}, \quad B = \{\text{во второй раз выпал орёл}\}.$$

Выпишите элементарные события, благоприятствующие каждому из этих событий и событию $A \cup B$.

75. Монету бросают дважды. Представьте в виде объединения двух событий следующие события:

а) хотя бы один раз выпала решка;

б) оба раза выпала одна и та же сторона монеты.

76. На диаграмме Эйлера укажите событие C, которое состоит в том, что:

а) событие A наступило, а B — нет;

б) событие B наступило, а A — нет;

в) наступило хотя бы одно из событий A и B;

г) не наступило ни одно из событий A и B;

д) наступили оба события A и B.

77. На диаграмме Эйлера укажите событие: а) $A \cup \overline{B}$; б) $\overline{A \cup B}$.

78. Бросают одну игральную кость. Рассмотрим событие

$$A = \{\text{выпало чётное число очков}\}.$$

Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cap B$, и найдите $\mathrm{P}(A \cap B)$, если событие B состоит в том, что:

а) выпало число очков, кратное 3;

б) выпало нечётное число очков;

в) выпало число очков, кратное 4;

г) выпало число очков, кратное 5.

79. Бросают одну игральную кость. Рассмотрим событие

$$A = \{\text{выпало чётное число очков}\}.$$

Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cup B$, и найдите $\mathrm{P}(A \cup B)$, если событие B состоит в том, что:

а) выпало число очков, кратное 3;

б) выпало нечётное число очков;

в) выпало число очков, кратное 4;

г) выпало число очков, кратное 5;

80. Всего в случайном опыте 60 различных элементарных событий. События A и B несовместны. Событию A благоприятствует 19 элементарных событий, а событию B — 28 элементарных событий.

а) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{B}$?

б) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{A}$?

в) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{A \cup B}$?

г) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{A} \cup \overline{B}$?

81. Бросают две игральные кости. Рассмотрим события

$$A = \{\text{на первой кости выпала единица}\},$$
$$B = \{\text{на второй кости выпала единица}\}.$$

а) Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cup B$. Опишите это событие словами.

б) Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cap B$. Опишите это событие словами.

в) Найдите $\mathrm{P}(A \cup B)$.

г) Найдите $\mathrm{P}(A \cap B)$.

82. Бросают две игральные кости. Рассмотрим события

$$U = \{\text{на первой кости выпало число очков, кратное 3}\},$$
$$V = \{\text{на второй кости выпало число очков, кратное 3}\}.$$

а) Выделите в таблице элементарных событий этого опыта все элементарные события, благоприятствующие событиям U и V.

б) Сколько элементарных исходов благоприятствует событию $U \cap V$?

в) Опишите словами событие $U \cap V$ и найдите его вероятность.

г) Опишите словами событие $U \cup V$ и найдите его вероятность.

83. Бросают две игральные кости. Рассмотрим события

$$K = \{\text{на первой кости выпало чётное число очков}\},$$
$$L = \{\text{на второй кости выпало чётное число очков}\}.$$

а) Выделите в таблице элементарных событий этого опыта элементарные события, благоприятствующие событиям K и L.

б) Сколько элементарных исходов благоприятствует событию $K \cap L$?

в) Сколько элементарных исходов благоприятствует событию $K \cup L$?

г) Опишите словами событие $K \cup L$ и найдите его вероятность.

д) Опишите словами событие $K \cap L$ и найдите его вероятность.

е) Опишите словами событие $K \cap \overline{L}$ и найдите его вероятность.

ж) Опишите словами событие $\overline{K} \cap L$ и найдите его вероятность.

84. Нарисуйте диаграммы Эйлера, изображающие события:
а) $A \cup \overline{B}$; б) $\overline{A} \cup C$; в) $\overline{A \cup B}$; г) $A \cup B \cup C$; д) $\overline{A} \cup B \cup C$;
е) $A \cup \overline{B \cup C}$; ж) $\overline{A \cup B \cup C}$; з) $\overline{A} \cup B \cup \overline{C}$.

85. Монету подбрасывают три раза. Рассмотрим случайные события

$$A = \{\text{выпал ровно один орёл}\},$$
$$B = \{\text{в первый раз выпал орёл}\},$$
$$C = \{\text{выпало не менее двух орлов}\}.$$

Сформулируйте события $A \cup B$, $A \cap \overline{C}$, $\overline{B} \cup C$ и найдите их вероятности.

86. В социологическом исследовании случайным образом из учащихся школы выбирают респондентов. Рассмотрим события

$$A = \{\text{выбран юноша}\},$$
$$B = \{\text{выбран учащийся десятого класса}\},$$
$$C = \{\text{выбрана девушка из десятого класса}\}.$$

а) Сформулируйте события $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

б) Есть ли среди событий A, B и C несовместные?

в) Сформулируйте события $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$.

г) Верно ли равенство $B = B \cup C$?

д) Верно ли равенство $B \cap C = C$?

е) Найдите вероятность события $A \cap B \cap C$.

ж) Верно ли, что $\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = 1$?

87. В школьной столовой после обеда были проданы два последних пирожка. Рассмотрим случайные события

$$A = \{\text{хотя бы один пирожок купил учитель}\},$$
$$B = \{\text{ровно один из двух пирожков купил учащийся}\}.$$

Сформулируйте события: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$.

88. В случайном эксперименте 20 элементарных событий. Событию A благоприятствуют 12 из них. Сколько элементарных событий благоприятствует событию $\overline{A}$?

89. В некотором случайном опыте может произойти событие K. Найдите вероятность события $\overline{K}$, если вероятность события K равна:

а) 0,4; б) 0,85; в) 0,13; г) $\frac{1}{2}$; д) p.

Какие значения может принимать p?

90. Докажите, что события A и B не могут быть противоположными, если $\mathrm{P}(A) = 0{,}73$, а $\mathrm{P}(B) = 0{,}34$.

91. Вероятность события A равна $\frac{1}{3}$, а вероятность события B равна $\frac{2}{3}$. Обязательно ли события A и B взаимно противоположны? Если да — докажите, если нет — приведите пример, когда это не так.

92. Могут ли быть противоположными события C и D, если:

а) $\mathrm{P}(C) = 0{,}25$; $\mathrm{P}(D) = 0{,}75$;

б) $\mathrm{P}(C) = 0{,}12$; $\mathrm{P}(D) = 0{,}85$;

в) $\mathrm{P}(C) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; $\mathrm{P}(D) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

г) $\mathrm{P}(C) = 0{,}5 + n$; $\mathrm{P}(D) = 0{,}5 - n$, где $-0{,}5 \leqslant n \leqslant 0{,}5$;

д) $\mathrm{P}(C) = 0{,}8 + m$; $\mathrm{P}(D) = 0{,}8 - m$, где $-0{,}2 \leqslant m \leqslant 0{,}2$;

е) $\mathrm{P}(C) = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$; $\mathrm{P}(D) = \frac{2ab}{(a+b)^2}$, где $a > 0$, $b > 0$?

93. Бросают одну игральную кость. Событие A состоит в том, что

а) выпала шестёрка; б) выпало чётное число очков;

в) выпало число очков, кратное 3.

Для каждого случая перечислите элементарные события, благоприятствующие событию $\overline{A}$, опишите событие $\overline{A}$ словами и найдите $\mathrm{P}(\overline{A})$.

94. Бросают две игральные кости. Событие A состоит в том, что в сумме на них выпало: а) 2 очка; б) 12 очков; в) менее 4 очков; г) более 10 очков.

Для каждого случая опишите событие $\overline{A}$ словами и найдите $\mathrm{P}(\overline{A})$.

95. В классе 15 мальчиков и 10 девочек. Из класса случайным образом выбирают одного ученика. Рассмотрим событие

$$D = \{\text{выбрана девочка}\}.$$

а) Сколько элементарных событий благоприятствует событию D?

б) Чему равна вероятность события D?

в) Опишите словами событие $\overline{D}$.

г) Чему равна вероятность $\mathrm{P}(\overline{D})$?

96. Симметричную монету бросили четыре раза. Орёл при этом может выпасть 1, 2, 3 или 4 раза, а может не выпасть ни разу. Вероятности этих событий представлены в таблице:

Число выпадений орла	0	1	2	3	4
Вероятность	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Найдите вероятность события, противоположного событию:

а) орёл не выпал ни разу; б) орёл выпал более одного раза;

в) решка выпала менее трёх раз;

г) орёл выпал неизвестно сколько раз, но точно не два раза.

97. Из класса выбирают двух учеников. Опишите словами событие $\overline{B}$, если событие B состоит в том, что:

а) оба выбранных ученика — мальчики;

б) выбраны ученики одного пола.

98. В люстре пять новых лампочек. Событие A состоит в том, что в течение года:

а) перегорит хотя бы одна из них;

б) перегорят ровно две лампочки;

в) перегорят более трёх лампочек;

г) перегорят меньше четырёх лампочек.

Для каждого из этих событий опишите словами событие $\overline{A}$.

99. На диаграмме Эйлера изобразите событие D, которое состоит в том, что:

а) событие A наступило, а B — нет; б) событие B наступило, а A — нет;

в) наступило событие $\overline{A}$; г) наступило событие $\overline{B}$.

100. В случайном эксперименте монету бросили трижды. Рассмотрим события

$$A = \{\text{выпало три орла}\},$$
$$B = \{\text{в первый раз выпал орёл}\},$$
$$C = \{\text{выпало хотя бы два орла}\}.$$

Сформулируйте события $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$.

101. В классе 20 учащихся, восемь из которых юноши. Случайным образом отбирают двух учащихся. Рассмотрим события

$$A = \{\text{оба выбранных — юноши}\},$$
$$B = \{\text{среди выбранных ровно одна девушка}\},$$
$$C = \{\text{среди выбранных нет юношей}\}.$$

а) Если среди этих трёх событий взаимно противоположные?

б) Сформулируйте описание события $\overline{B}$.

102. В социологическом исследовании случайным образом отбираются совершеннолетние респонденты для опроса. Исследователей интересуют распределение мнений по возрастам опрошенных. Рассмотрим события

$$A = \{\text{выбран респондент в возрасте от 18 до 25 лет}\},$$
$$B = \{\text{выбран респондент в возрасте от 26 до 40 лет}\},$$
$$C = \{\text{выбран респондент старше 40 лет}\},$$
$$D = \{\text{выбран респондент мужского пола}\},$$

Сформулируйте описания следующих событий:

а) $(A \cup B) \cap \overline{D}$; б) $\overline{A} \cap \overline{D}$; в) $\overline{C} \cup D$; г) $(\overline{C \cap D}) \cap D$.

103. Бросают одну игральную кость. Рассмотрим событие

$$A = \{\text{выпало чётное число очков}\}.$$

событие B заключается в том, что

а) выпало число очков, кратное 3;

б) выпало число очков, кратное 4;

в) выпало число очков, большее 4;

г) выпало число очков, меньшее 3.

Для каждого случая выпишите элементарные события, составляющие событие $A \cap B$, и найдите $\mathrm{P}(A \cap B)$.

104. Бросают две игральные кости. Рассмотрим события

$$A = \{\text{на первой кости выпало меньше трёх очков}\},$$
$$B = \{\text{на второй кости выпало больше четырёх очков}\}.$$

а) В таблице элементарных событий этого опыта выделите цветом все элементарные события, благоприятствующие событиям A, B и $A \cap B$.

б) Сформулируйте событие $A \cap B$ и найдите его вероятность.

105. Из класса случайным образом последовательно выбирают двух учеников. Рассмотрим события

$$D = \{\text{первый выбранный ученик — девочка}\},$$
$$C = \{\text{второй выбранный ученик — девочка}\}.$$

Опишите словами события $D \cup C$ и $D \cap C$.

106. Из класса случайным образом последовательно выбирают двух учеников. Рассмотрим события

$$A = \{\text{первый выбранный ученик — девочка}\},$$
$$B = \{\text{среди выбранных учеников есть только одна девочка}\}.$$

Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

107. Из класса случайным образом последовательно выбирают двух учеников. Рассмотрим события

$$A = \{\text{первый выбранный ученик — девочка}\},$$
$$C = \{\text{второй выбранный ученик — мальчик}\}.$$

Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

108. Покупатель заказал товар в двух интернет-магазинах. Рассмотрим события

$$C = \{\text{товар доставят из первого магазина}\},$$
$$D = \{\text{товар доставят из второго магазина}\}.$$

Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

109. Старшеклассница посещает дополнительные занятия на курсах. Рассмотрим события

$$M = \{\text{завтра состоятся занятия по алгебре}\},$$
$$G = \{\text{завтра состоятся занятия по английскому языку}\}.$$

Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

110. В ходе некоторого опыта событию A благоприятствуют 6 элементарных событий, событию B — 8 элементарных событий. При этом два элементарных события благоприятствуют событию $A \cap B$. Сколько элементарных событий благоприятствует событию:

а) $A \cap \overline{B}$; б) $\overline{A} \cap B$; в) $A \cup B$?

111. В ходе некоторого опыта событию A благоприятствуют 6 элементарных событий, событию B — 8 элементарных событий. При этом 10 элементарных событий благоприятствуют событию $A \cup B$. Сколько элементарных событий благоприятствует событию:

а) $A \cap \overline{B}$; б) $\overline{A} \cap B$; в) $A \cap B$?

112. Запишите формулой событие, изображённое на диаграмме Эйлера (рис. 13).

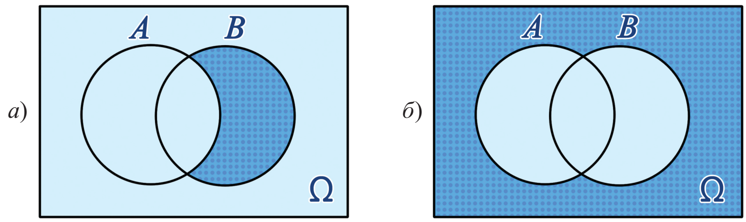


Рис. 13

113. Запишите формулой событие, изображённое на диаграмме Эйлера (рис. 14).

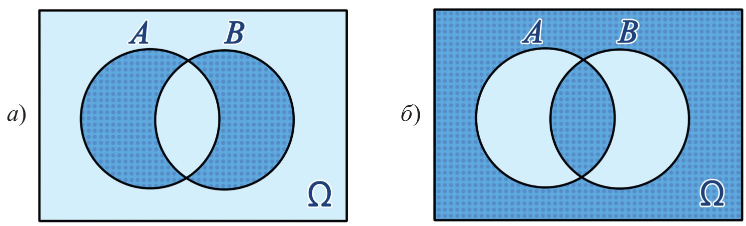


Рис. 14

114. Изобразите на диаграмме Эйлера событие:

а) $A \cap \overline{B}$; б) $\overline{A} \cap \overline{B}$; в) $\overline{A} \cap B$; г) $\overline{A \cap B}$.

115. Докажите, что $\mathrm{P}(A \cup B) \geqslant \mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(A \cup B) \geqslant \mathrm{P}(B)$ для любых событий A и B.

116. Докажите, что $\mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(A \cap B) \leqslant \mathrm{P}(B)$ для любых событий A и B.

117. Изобразите на диаграмме Эйлера событие:

а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cap \overline{B} \cap C$; в) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$; г) $A \cap \overline{B \cap C}$; д) $\overline{A \cap B \cap C}$.

118. Изобразите на диаграмме Эйлера событие:

а) $A \cap (B \cup C)$; б) $A \cup (B \cap C)$; в) $\overline{A} \cap (B \cup C)$; г) $A \cap (\overline{B} \cup C)$; д) $A \cap \overline{(B \cup C)}$;
е) $A \cup (\overline{B} \cap C)$; ж) $\overline{A} \cup (B \cap \overline{C})$; з) $A \cup \overline{(B \cap C)}$; и) $\overline{A \cup (\overline{B} \cap C)}$.

119. С помощью диаграмм Эйлера докажите равенство:

а) $(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$; б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

в) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; г) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; д) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

120. Бросают одну игральную кость. Рассмотрим события

$$A=\{\text{выпало чётное число очков}\},$$
$$B=\{\text{выпало число очков, кратное } 5\}.$$

а) Являются ли события A и B несовместными?

б) Используя правило сложения вероятностей, вычислите $\mathrm{P}(A\cup B)$.

121. Бросают одну игральную кость. Рассмотрим события

$$A=\{\text{выпало чётное число очков}\},$$
$$B=\{\text{выпало число очков, меньшее четырёх}\}.$$

а) Являются ли события A и B несовместными?

б) Опишите словами событие $A\cup B$.

в) Вычислите $\mathrm{P}(A\cup B)$.

122. Являются ли события C и D противоположными, если они несовместны и:

а) $\mathrm{P}(C)=0{,}5$, $\mathrm{P}(D)=0{,}4$; б) $\mathrm{P}(C\cup D)=0{,}95$; в) $\mathrm{P}(C)=0{,}17$, $\mathrm{P}(D)=0{,}83$;

г) $\mathrm{P}(C)=\dfrac{b^2+1}{2(b+1)^2}$, $\mathrm{P}(D)=\dfrac{b}{(b+1)^2}$, где $b\geqslant 0$; д) $\mathrm{P}(C)=\sin^2 x$, $\mathrm{P}(D)=\cos^2 x$?

123. События A и B несовместны. Докажите, что $B=\overline{A}$, если:

а) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$; б) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2ab}{(a+b)^2}$.

в) $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2pq}{(p-q)^2}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{p^2-4pq+q^2}{(p-q)^2}$.

124. Пользуясь диаграммой Эйлера, докажите, что несовместны события:

а) A и $\overline{A}\cap B$; б) $\overline{A}\cap\overline{B}$ и $A\cap\overline{B}$.

125. Пользуясь диаграммой Эйлера докажите, что несовместны события $\overline{A}\cap B$, $A\cap\overline{B}$ и $A\cap B$.

126. Пользуясь результатами упражнений 124 и 125, докажите, что:

а) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\overline{A}\cap B)$; б) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap\overline{B})+\mathrm{P}(\overline{A}\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B)$.

127. Вычислите $\mathrm{P}(A\cup B)$, если:

а) $\mathrm{P}(A)=0{,}8$, $\mathrm{P}(B)=0{,}6$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0{,}4$; б) $\mathrm{P}(A)=0{,}5$, $\mathrm{P}(B)=0{,}6$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0{,}3$.

128. Вычислите вероятность пересечения событий A и B, если:

а) $\mathrm{P}(A)=0{,}8$, $\mathrm{P}(B)=0{,}6$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0{,}9$; б) $\mathrm{P}(A)=0{,}5$, $\mathrm{P}(B)=0{,}6$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0{,}8$.

129. Могут ли события C и D быть такими, что:

а) $\mathrm{P}(C)=0{,}6$, $\mathrm{P}(D)=0{,}7$ и $\mathrm{P}(C\cap D)=0{,}2$; б) $\mathrm{P}(C)=P(D)=0{,}7$, $\mathrm{P}(C\cap D)=0{,}49$?

130. Известно, что $\mathrm{P}(A)=0{,}4$, $\mathrm{P}(B)=0{,}8$ и $\mathrm{P}(A\cap B)=0{,}2$. Докажите, что событие $A\cup B$ является достоверным.

131. В некоторой игре заняты двое игроков. Игра может окончиться победой одного из них либо вничью. Вероятность того, что первый игрок не проиграет, равна 0,4. Вероятность того, что не проиграет второй игрок, равна 0,7. Найдите вероятность того, что игра окончится вничью.

132. Двое играют в некоторую игру. Игра может окончиться победой одного из игроков либо вничью. Вероятность проигрыша первого игрока равна 0,3. Вероятность проигрыша второго игрока равна 0,5. Найдите вероятность того, что игра окончится победой одного из игроков.

133. Двое играют в шашки. Силы игроков равны, но ничья наступает с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что выиграет первый игрок.

134. В некотором случайном эксперименте рассматривают события A и B. Известно, что $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$, а $\mathrm{P}(B) = 0{,}56$.

а) Могут ли события A и B быть несовместными?

б) Найдите наименьшую возможную вероятность события $A \cap B$.

135. События U и V несовместны. Найдите вероятность их объединения, если:

а) $\mathrm{P}(U) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(V) = 0{,}4$; б) $\mathrm{P}(U) = 0{,}52$, $\mathrm{P}(V) = 0{,}17$;

в) $\mathrm{P}(U) = 1 - \alpha$, $\mathrm{P}(V) = 1 - \beta$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$;

г) $\mathrm{P}(U) = a^2 + ab + b^2$, $\mathrm{P}(V) = ab$, где $0 \leqslant a + b \leqslant 1$.

136. Могут ли события A и B быть несовместными, если:

а) $\mathrm{P}(A) = 0{,}65$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}55$; б) $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}7$; в) $\mathrm{P}(A) = a$, $\mathrm{P}(B) = 2 - a$;

г) $\mathrm{P}(A) = P(B) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\mathrm{P}(A) = P(B) = \dfrac{1}{3}$?

137. На двери два замка. Вероятность того, что первый замок закрыт, равна 0,9. Вероятность того, что второй замок закрыт, равна 0,8. Вероятность того, что оба замка закрыты, равна 0,72. Найдите вероятность того, что:

а) закрыт хотя бы один замок;

б) оба замка открыты;

в) дверь заперта только на первый замок;

г) дверь заперта только на один замок.

138. У фирмы такси имеется всего два автобуса. Клиент хочет срочно заказать один автобус. Вероятность того, что в этот момент первый автобус свободен, равна 0,6. Такова же вероятность, что свободен второй автобус. Вероятность того, что свободны оба автобуса, равна 0,36. Найдите вероятность того, что в момент заказа:

а) свободен хотя бы один автобус;

б) ни один автобус не свободен;

в) свободен только второй автобус;

г) свободен только один из автобусов.

139. Клиент хочет записаться на обслуживание в автосервис в один из двух дней — в субботу или в воскресенье. Вероятность того, что в субботу автосервис сможет принять клиента, равна 0,8. Вероятность того, что автосервис сможет принять клиента в воскресенье, равна 0,9. Вероятность того, что автосервис сможет принять клиента в любой из дней, равна 0,72. Найдите вероятность того, что сервис:

а) сможет принять клиента хотя бы в один из выходных;

б) не сможет принять клиента ни в один из выходных;

в) сможет принять клиента только в субботу;

г) сможет принять клиента только в воскресенье.

140. Для новогоднего праздника руководство фирмы хочет заказать зал на вечер 30 декабря в одном из двух ресторанов: «Поляна» или «Лагуна». Каждый зал свободен с вероятностью p, а с вероятностью $1 - p$ уже заказан. Оба зала свободны с вероятностью p^2. Найдите вероятность того, что:

а) окажется свободен только один из залов (а другой уже заказан);

б) окажется свободен только зал в ресторане «Поляна»;

в) оба зала уже заказаны.

Вопросы

1. Сформулируйте определение события, противоположного событию A.

2. Сформулируйте определение пересечения двух событий.

3. Сформулируйте определение объединения двух событий.

4. Как связаны вероятности противоположных событий?

5. Как называется изображение событий с помощью геометрических фигур?

6. Какие элементарные исходы опыта входят в пересечение двух событий?

7. Какие элементарные исходы опыта входят в объединение двух событий?

8. Что такое несовместные события?

9. Что является пересечением несовместных событий?

10. Что является объединением противоположных событий?

11. Чему равна вероятность объединения противоположных событий?

12. Запишите формулу сложения вероятностей.

13. Справедлива ли формула

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

в том случае, если события A и B несовместны?

Глава III

Условная вероятность

§ 6. Условная вероятность

Может ли одно событие влиять на шансы другого? Предположим, что в некотором случайном эксперименте можно говорить о нескольких событиях одновременно и даже можно узнать их вероятности. Но наступление одного из событий может изменить условия случайного эксперимента и, следовательно, вероятности других событий. Как узнать новые вероятности?

Пример 1. Было бы справедливо, если бы автомобильный страховой полис стоил тем дороже, чем выше вероятность страхового случая для данного водителя[1]. Приблизительная вероятность страхового случая известна. Как изменится вероятность аварии и, стало быть, цена страховки при условии, что водитель имеет малый водительский стаж[2]? Это новая вероятность — ***условная вероятность***, и её нужно узнать.

Перейдём на более формальный язык. Рассмотрим случайный эксперимент и случайное событие A в этом эксперименте. Предположим, что уже произошло некоторое событие B и нам об этом известно. Как изменилась вероятность события A при условии, что событие B произошло?

Обозначим эту условную вероятность $\mathrm{P}(A|B)$. Эта запись читается «условная вероятность события A при условии B» (вертикальная черта не означает деление).

Условная вероятность не является новым видом вероятности. Это обычная вероятность со всеми присущими ей свойствами. В записи $\mathrm{P}(A|B)$ событие B, указанное справа от черты[3], напоминает нам, что теперь, когда событие B считается наступившим, новое пространство элементарных событий есть B, а уже не Ω. Безусловную вероятность $\mathrm{P}(A)$ мы с тем же успехом могли бы обозначить $\mathrm{P}(A|\Omega)$.

Пример 2. В случайном эксперименте Ω монету бросают два раза. Событие $A = \{\text{два раза выпал орёл}\}$ имеет вероятность $\frac{1}{4}$. Предположим, что нам из-

[1] Вероятность страхового случая лишь один из факторов, влияющих на стоимость страхования.

[2] В России малым водительским стажем считается стаж менее двух лет.

[3] Запись $A|B$ не означает новое событие и сама по себе не употребляется.

вестно, что при первом броске выпал орёл (событие B). Теперь для наступления события A достаточно, чтобы орёл выпал ещё только один раз. Вероятность этого равна $\frac{1}{2}$. Получается, что одно и то же событие A в условиях исходного эксперимента Ω имеет вероятность $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|\Omega) = \frac{1}{4}$, а при условии, что событие B наступило, вероятность того же события A стала другой: $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{2}$.

Как вычислять условные вероятности? Мы уже сказали, что условные вероятности не отличаются по своим свойствам от обычных вероятностей. Поэтому для условных вероятностей верны те же формулы, что и для обычных вероятностей. Воспользуемся этим.

Разобьём событие A на два несовместных события $A \cap B$ и $A \cap \overline{B}$. Тогда по формуле сложения вероятностей

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B|B) + \mathrm{P}(A \cap \overline{B}|B).$$

Событие B уже произошло, поэтому событие $A \cap \overline{B}$ осуществиться не может. Значит, $\mathrm{P}(A \cap \overline{B}|B) = 0$. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A \cap B|B).$$

Будем считать (это согласуется с интуитивным представлением), что ***наступление события B не меняет отношения вероятностей элементарных событий опыта, принадлежащих B***.

Следовательно, наступление события B не меняет отношение вероятностей двух любых событий, содержащихся в B, то есть если события C и D содержатся в событии B, то

$$\frac{\mathrm{P}(C|B)}{\mathrm{P}(D|B)} = \frac{\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(D)}.$$

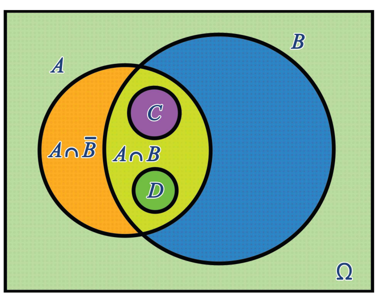


Рис. 15. Наступление события B может изменить вероятности событий C и D, но не может изменить их отношение

Вместо события C подставим событие $A \cap B$, а вместо события D — само событие B. Получаем

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B|B)}{\mathrm{P}(B|B)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Если событие B наступило, оно тем самым превратилось в достоверное. Значит, $\mathrm{P}(B|B) = 1$. Кроме того, мы учтём, что $\mathrm{P}(A \cap B|B) = \mathrm{P}(A|B)$. Получаем

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Разумеется, эта формула верна тогда, когда $\mathrm{P}(B) > 0$. Если $\mathrm{P}(B) = 0$, то условные вероятности при условии B мы не определяем.

6.1. Формула умножения вероятностей и последовательный выбор

Из формулы условной вероятности следует, что

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B).$$

Эту формулу часто называют ***формулой умножения вероятностей***.

Условные вероятности нам встречаются чаще, чем мы думаем. Мы многократно имели дело с составными опытами, которые можно представить в виде последовательности более простых опытов.

Пример 3. В конце экзамена два оставшихся студента по очереди вытягивают по одному билету. Первым будет тянуть Иванов, а вторым — Петров. На столе осталось три билета: восьмой, пятнадцатый и девятнадцатый. Нас интересует вероятность события «Иванов взял билет № 8, а Петров — № 19».

Рассмотрим этот пример с новой точки зрения. Возьмём два события:

$$B = \{\text{Иванов взял билет № 8}\}, \quad A = \{\text{Петров взял билет № 19}\}.$$

В первом опыте выбирает Иванов, и у него три равновозможных исхода. Поэтому $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$.

Во втором опыте выбирает Петров, и у него каждый раз есть два равновозможных исхода, однако какие это исходы — зависит от того, что вытянул Иванов. Если Иванов вытянул билет № 8, то вытянуть билет № 19 Петров может с вероятностью $\frac{1}{2}$, то есть $\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{2}$.

Заметьте, мы здесь не вычисляли условную вероятность, а нашли её из соображений равновозможности.

Тогда вероятность интересующего нас события $A \cap B$ можно найти по формуле умножения:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Удобно изобразить возникающие состояния точками. Если из одного состояния можно попасть в другое, соединим соответствующие точки линиями (рёбрами) и около каждого ребра подпишем вероятность этого перехода. Такое графическое представление называется ***деревом вероятностей***. Дерево для приведённого примера показано на рис. 16.

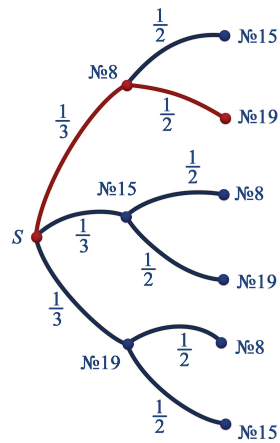


Рис. 16

Предположим, что для составного эксперимента удалось построить дерево вероятностей и понять, каковы условные вероятности переходов между состояниями.

Тогда вероятности сложных событий можно найти умножением условных вероятностей вдоль соответствующих цепочек рёбер. Именно эту возможность предоставляет полученная формула умножения вероятностей.

Условная вероятность события A может очень сильно отличаться от безусловной вероятности того же события A. Всё зависит от того, какие дополнительные события происходят в исходном эксперименте.

Пример 4. Нет ничего невероятного или удивительного в том, что хорошо подготовленный школьник ошибётся в несложной задаче, хотя вероятность этого мала. С другой стороны, практически невероятно, что этот школьник допустит какую-нибудь ошибку в пяти простых задачах подряд.

А что, если школьник ошибся в первой же задаче? Изменилась ли вероятность пяти неудач подряд? Да. Эта вероятность стала больше, потому что теперь достаточно ошибиться не пять раз подряд, а только четыре.

Представим себе, что школьник ошибся уже четыре раза. Теперь вероятность пяти неудач стала намного выше. Она теперь равна вероятности одной ошибки. Но нам по-прежнему кажется, что этого не может быть, поскольку мы не можем представить, что хорошо подготовленный школьник ошибётся подряд пять раз.

Конечно, такие случаи крайне редко встречаются. Но если испытания проводятся очень много раз, подобные маловероятные события происходят. Например, во время ЕГЭ, который сдают сотни тысяч выпускников, встречаются хорошо подготовленные учащиеся, случайно давшие неверный ответ на пять-семь простых заданий подряд. Их очень-очень мало, но несколько человек на всю страну вполне может быть.

Опыт показывает, что люди часто путают вероятность пересечения событий A и B и условную вероятность события B при условии A. Чтобы разобраться, ещё раз воспользуемся опытом с двукратным бросанием монеты. Событие B состоит в том, что первый раз выпал орёл, а событие A состоит в том, что орёл выпал оба раза.

Как мы знаем, $P(B)=\frac{1}{2}$ и $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$.

Событие $A\cap B$ совпадает с событием A. Поэтому $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$.

Если же мы знаем, что событие B уже осуществилось, то теперь для наступления события A достаточно, чтобы орёл выпал ещё только один раз. Вероятность этого равна $\frac{1}{2}$. Поэтому $P(A|B)=\frac{1}{2}$.

Формула условной вероятности даёт тот же результат:

$$P(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Упражнения

141. В эксперименте бросают одну игральную кость. Найдите вероятность события:

а) выпало больше трёх очков, если известно, что выпало чётное число;

б) выпало число пять, если известно, что выпало нечётное число;

в) выпало число, кратное 3, если известно, что выпало чётное число.

142. В эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что:

а) в сумме выпало больше десяти очков, если известно, что в первый раз выпало чётное число;

б) в сумме выпало больше девяти очков, если известно, что оба раза выпало одно и то же;

в) в сумме выпало менее пяти очков, если известно, что во второй раз выпало либо два, либо три.

143. Известно, что в некотором эксперименте возможны события A и B.

а) Найдите $\mathrm{P}(A|B)$, если $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}35$, $\mathrm{P}(B|A) = 0{,}8$.

б) Найдите $\mathrm{P}(B)$, если $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}56$, $\mathrm{P}(B|A) = 0{,}7$.

144. Бросают три различные монеты. Известно, что по меньшей мере одна из них выпала орлом вверх. Найдите условную вероятность того, что:

а) орёл выпал ровно на двух монетах;

б) орёл выпал больше чем на одной монете.

145. В эксперименте из отрезка $[0; 1]$ случайным образом выбирают одну точку x. Известно, что $x < \frac{1}{2}$. Найдите вероятность того, что:

а) $x > \frac{1}{3}$; б) $x < \frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$.

146*. На окошке торговой палатки висит объявление «ОТЛУЧИЛАСЬ НА 10 МИНУТ». Будем считать, что это правда: продавщица вернётся ровно через 10 минут после ухода. В какой-то момент Пётр подходит к палатке и видит объявление. Перед Петром стоит Иван, который говорит, что пришёл две минуты назад и продавщицы уже не было. Найдите вероятность того, что Петру придётся ждать возвращения продавщицы:

а) не более четырёх минут;

б) не менее двух минут;

в) более девяти минут.

Указание. За 0 возьмём момент ухода продавщицы, а за 10 — момент её возвращения. Обозначим момент прихода Петра через x. Тогда вероятности нужных событий вычисляются как условные вероятности при условии $x > 2$.

147. Точку случайным образом бросают в квадрат $ABCD$ со стороной 2. Известно, что она попала внутрь квадрата $KLMN$ со стороной 1.

При этом условии найдите вероятность того, что точка оказалась в квадрате $OPBQ$ (см. рис. 17).

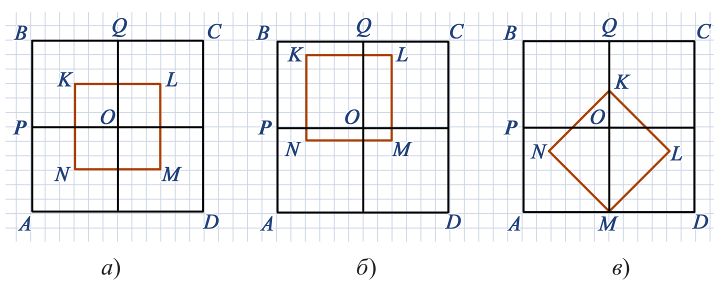


Рис. 17

148. В эксперименте бросают две игральные кости. Известно, что сумма выпавших очков равна 8. Найдите вероятность события:

а) на первой кости выпало меньше трёх очков;

б) на второй кости выпало больше четырёх очков.

149. Монету бросают пять раз. Известно, что ровно три раза выпал орёл. Найдите вероятность того, что:

а) в первый раз выпал орёл; б) во второй раз выпал орёл;

в) орёл выпал во второй и в пятый раз.

150. Клещ переносит заболевание П., опасное для собак. Известно, что среди собак, которых укусил клещ, заболевают только 3%. Если собаку укусил клещ, хозяевам рекомендуют сделать анализ крови, который у здоровой собаки в 98% случаев показывает отсутствие заболевания П. Известно, что 4% всех анализов положительные, то есть показывают наличие заболевания. Найдите вероятность того, что в случае положительного анализа на самом деле собака здорова.

6.2. Ошибка игрока

В предыдущем примере мы встретились с тем, как может подвести вероятностная интуиция, когда требуется переоценка вероятности в соответствии с изменившимися обстоятельствами.

Вот ещё замечательный пример похожего заблуждения. В ошибку впадает знаменитый автор детективов Эдгар Аллан По в своём рассказе «Тайна Мари Роже». В эпилоге есть рассуждение о теории вероятностей, которое автор вкладывает в уста своего главного героя Огюста Дюпена:

> «*Например, обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестёрки делает почти невероятным выпадение её в третий раз и даёт все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект не может этого воспринять, он не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий ещё пока только в будущем. Возможность выпадения шестёрки кажется точно такой же, как и в любом случае, — то есть зависящей только от того, как именно будет брошена кость. И это представляется настолько очевидным, что всякое возражение обычно встречается насмешливой улыбкой, а отнюдь не выслушивается с почтительным вниманием. Суть скрытой тут ошибки — грубейшей ошибки — я не могу объяснить в пределах места, предоставленного мне здесь, а людям, искушённым в философии, никакого объяснения и не потребуется*».

Неудивительно, что Эдгар По не может объяснить «суть ошибки» в пределах предоставленного места. Вряд ли её можно объяснить и более пространно. Разберёмся в этой парадоксальной ситуации. По считает, что выпадение трёх шестёрок подряд — очень маловероятное событие, а поэтому выпадение двух шестёрок подряд делает третью шестёрку практически невозможной.

Рассмотрим события

$$A_2 = \{\text{два раза подряд выпала шестёрка}\}$$

и

$$A_3 = \{\text{три раза подряд выпала шестёрка}\}.$$

Рассмотрим эксперимент, в котором нам уже известно, что две шестёрки выпали. Вероятность этого события $\mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{36}$. Тогда вероятность трёх шестёрок подряд становится условной вероятностью события A_3, когда известно, что две шестёрки уже выпали:

$$\mathrm{P}(A_3|A_2) = \frac{\mathrm{P}(A_2 \cap A_3)}{\mathrm{P}(A_2)} = \frac{\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(A_2)} = \frac{1}{216} : \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

Иными словами, теперь мы имеем дело с вероятностью одной последней шестёрки, а это событие вполне вероятно.

Скорее всего, Эдгар По не принял во внимание то, что выпадение двух шестёрок подряд меняет условия эксперимента. Ошибку По можно пояснить совсем просто: предположим, что рядом с игровым столом находятся двое зрителей. Первый отвлёкся и вернулся к игре, когда выпали уже три шестёрки подряд. Он, конечно, удивлён — ведь для него вероятность этого события равна $\frac{1}{216}$. Второй зритель не отвлекался и видел, как выпали две первые шестёрки. Тогда третья шестёрка его уже не сильно удивляет — для него вероятность трёх шестёрок сначала выросла до $\frac{1}{36}$, а потом до $\frac{1}{6}$. Эта ситуация может показаться парадоксальной только в том случае, если мы почему-то считаем, что вероятность трёх шестёрок не меняется по мере изменения условий. Но это, как мы теперь понимаем, неверно: условная вероятность события может значительно меняться в зависимости от того, какие события уже наступили в ходе эксперимента.

6.3. Формула полной вероятности

Разобьём множество всех элементарных событий эксперимента на непересекающиеся подмножества B_1, B_2, B_3, ..., B_n (см. рис. 18).

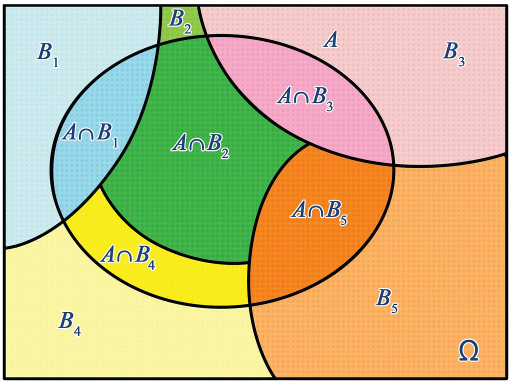


Рис. 18. Множество Ω разбито на непересекающиеся события $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$

Если нас интересует некоторое событие A, то можно записать очевидное равенство

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n).$$

Выразив вероятности пересечений через условные вероятности события A, получим ***формулу полной вероятности***

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

В теории вероятностей эта формула сыграла важную роль и сейчас активно используется во многих приложениях.

Пример 5. В некотором городе 4% выпускников оканчивают специализированные школы, остальные — общеобразовательные.

Результаты показали, что 60 баллов и выше на ЕГЭ по математике получили 35% выпускников общеобразовательных школ и 74% выпускников специализированных школ. Найдём вероятность события

$$A = \left\{ \begin{matrix} \text{случайный выпускник в городе получит} \\ \text{на ЕГЭ по математике не менее 60 баллов} \end{matrix} \right\}.$$

Решение. Определим эксперимент как выбор случайного выпускника. Тогда каждый выпускник представляет собой элементарное событие в этом эксперименте. Определим два события:

$$B_1 = \{\text{выпускник оканчивает специализированную школу}\}$$

и

$$B_2 = \{\text{выпускник оканчивает общеобразовательную школу}\}.$$

Эти два события несовместны и в совокупности покрывают всё множество элементарных исходов.

Вероятность события

$$A = \{\text{выпускник получил не менее 60 баллов}\}$$

найдём по формуле полной вероятности:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B_1) \cdot \mathrm{P}(B_1) + \mathrm{P}(A|B_2) \cdot \mathrm{P}(B_2).$$

По известным результатам работы мы имеем оценки условных вероятностей:

$$\mathrm{P}(A|B_1) \approx 0{,}74 \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(A|B_2) \approx 0{,}35.$$

Вероятности событий B_1 и B_2 нам известны точно (например, по данным городского управления образования):

$$\mathrm{P}(B_1) = 0{,}04 \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(B_2) = 0{,}96.$$

Тогда

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}74 \cdot 0{,}04 + 0{,}35 \cdot 0{,}96 \approx 0{,}03 + 0{,}34 = 0{,}37$$

(значения округлены до сотых).

Это означает, что в этом городе можно ожидать, что не менее 60 баллов на ЕГЭ по математике получат около 37% выпускников.

Оценка погрешности в наши расчёты не входит.

Упражнения

151. Известно, что в некотором эксперименте возможны события A и B.

а) Найдите $\mathrm{P}(B)$, если $\mathrm{P}(A)=0{,}3$, $\mathrm{P}(B|A)=0{,}2$, $\mathrm{P}(B|\overline{A})=0{,}4$.

б) Найдите $\mathrm{P}(A)$, если $\mathrm{P}(B|A)=0{,}8$, $\mathrm{P}(B|\overline{A})=0{,}6$, $\mathrm{P}(B)=0{,}72$.

152. Вероятность того, что случайно выбранный взрослый горожанин имеет мобильный телефон, равна 0,9. Вероятность того, что случайно выбранный сельский житель имеет мобильный телефон, равна 0,7. Известно, что доля горожан среди всего населения страны составляет 70%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный житель страны имеет мобильный телефон.

153. Рассмотрим события

$$A = \left\{\begin{array}{c}\text{случайно выбранный ученик школы}\\ \text{имеет пятёрку по математике}\end{array}\right\},$$

$$B = \left\{\begin{array}{c}\text{случайно выбранный ученик школы}\\ \text{имеет пятёрку по русскому языку}\end{array}\right\}.$$

Известно, что 10% учащихся школы имеют пятёрки по математике и 70% отличников по математике имеют пятёрку также и по русскому языку. Найдите вероятность события

$$A\cap B = \left\{\begin{array}{c}\text{случайно выбранный ученик имеет}\\ \text{пятёрки по обоим предметам}\end{array}\right\}.$$

154. Задние фонари для сборки автомобилей определённой марки поставляют два завода из двух городов: К. и В. Завод в городе К. поставляет 40% всех фонарей. Среди изделий завода из города К. брак составляет 2%. Среди изделий завода из города В. брак составляет 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный фонарь имеет брак.

155. Горожане составляют 70% населения. Остальные жители — сельские. Известно, что проект некоторого закона одобряет 50% жителей страны. Среди горожан этот проект одобряет 60%. Определите, какая доля сельских жителей одобряет данный закон.

156. Лесной клещ переносит заболевание П., опасное для собак. Известно, что среди собак, которых укусил клещ, заболевают только 3%. Если собаку укусил клещ, хозяевам рекомендуют сделать анализ крови, который показывает наличие заболевания П. в 4% случаев. Если собака больна, то анализ показывает заболевание в 98% случаев. Найдите вероятность того, что анализ ошибочно покажет заболевание у здоровой собаки.

157. Опытный операционист банка допускает ошибку при проведении сложной операции в 1% случаев. Неопытный — в 5% случаев. В большом отделении банка из 100 операционистов 76 опытных. Найдите вероятность ошибки при проведении операции случайно выбранным операционистом отделения.

158. Один сказочный король всегда следовал советам советника. Однажды король решил, что лучше иметь двух советников, чем одного. Если советники советуют одно и то же, то нужно следовать их совету. Если советники расходятся, то нужно принимать решение, бросая монету. Будем считать, что каждый из советников даёт независимо от другого верный совет с вероятностью p. Правда ли, что, имея двух советников, король будет чаще принимать верные решения, чем имея одного? Какова вероятность принятия верного решения при двух советниках?

6.4. Независимость случайных событий

Пусть A и B — случайные события некоторого случайного эксперимента. Рассмотрим условную вероятность $\mathrm{P}(A|B)$ события A при условии, что событие B произошло. Предположим, что

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A).$$

Это равенство говорит, что событие B не влияет на вероятность события A. В этом случае естественно сказать, что ***событие A не зависит от события B***.

Покажем, что если A не зависит от B, то и B не зависит от A. Запишем определение условной вероятности:

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

Воспользовавшись равенством $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$, получим

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A), \quad \text{откуда} \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Верно и обратное — если выполнено последнее равенство, то событие A не зависит от B. В равенстве

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

события A и B можно поменять местами, но само равенство сохранится. Поэтому если A не зависит от B, то и B не зависит от A.

Свойство независимости событий оказалось взаимным. Поэтому в качестве определения независимости можно взять любое из трёх равенств

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A), \quad \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B), \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Обычно определением считают последнее равенство.

Определение 1. Два случайных события одного эксперимента называются ***независимыми***, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Нужно помнить, что события A и B относятся к одному эксперименту, и в нашем выводе мы предполагали, что $\mathrm{P}(A)$ и $\mathrm{P}(B)$ положительны.

Впрочем, принятое определение независимости можно применять и к событиям с нулевой вероятностью.

Пример 6. Из первых 20 натуральных чисел наудачу выбирают одно число. Рассмотрим события

$$A = \{\text{выбрано чётное число}\}, \quad B = \{\text{выбрано число, кратное } 5\}.$$

Покажем, что два эти события независимы.

Событие A включает 10 элементарных событий:

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}.$$

Так как элементарные события этого эксперимента равновозможны,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Событие B включает 4 элементарных события: $B = \{5, 10, 15, 20\}$. Значит,

$$\mathrm{P}(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Пересечение $A \cap B$ содержит два элементарных события: $A \cap B = \{10,\ 20\}$.

Поэтому

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Следовательно, события A и B независимы.

Пример 7. Игральную кость бросают дважды. Выберем событие A так, чтобы оно было связано только с броском первой кости, например,

$$A = \{\text{на первой кости выпало больше трёх очков}\}.$$

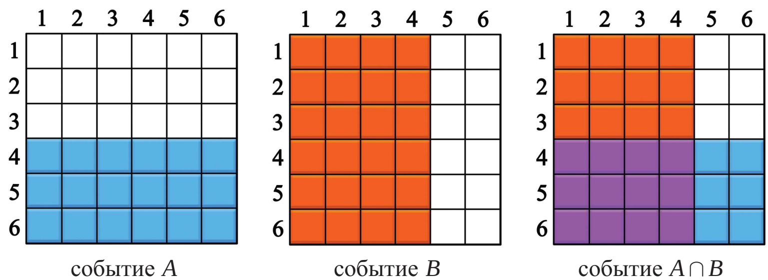


Рис. 19

Выберем событие B так, чтобы оно было связано только с броском второй кости, например,

$$B = \{\text{на второй кости выпало менее пяти очков}\}.$$

Покажем, что события A и B независимы.

Найдём вероятности всех трёх событий:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}.$$

Если мы возьмём два любых других события, также связанных с двумя разными костями, то они тоже будут независимы. Это объясняется организацией эксперимента — на второй бросок не влияет результат первого.

Обратите внимание — на рис. 19 наглядно видна независимость событий. Событие A занимает половину всей таблицы (рис. слева). Это же событие A занимает половину события B (рис. справа). Иными словами, событие A занимает одинаковую часть внутри всего опыта и внутри только события B.

Если два события получены в двух независимых экспериментах, то эти события будут независимыми в новом сложном эксперименте, полученном соединением первых двух. На практике независимость экспериментов обычно обеспечивается способом их проведения.

Свойство. Если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

Доказательство. Рассмотрим условную вероятность события $\overline{A}$ при условии B:

$$\mathrm{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathrm{P}(A|B).$$

Поскольку по условию A и B независимы, $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$. Значит,

$$\mathrm{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\overline{A}),$$

а отсюда следует, что события $\overline{A}$ и B независимы.

Аналогично доказывается, что независимы события A и $\overline{B}$. Применив доказанное свойство ещё раз к независимым событиям A и $\overline{B}$, получим, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы. ◀

Задача 1. В некоторой семье двое детей, известно, что старший — мальчик. Какова при этом вероятность того, что оба ребёнка — мальчики (считается, что вероятности рождения девочек и мальчиков одинаковы)?

Решите задачу самостоятельно.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

6.5. Дублирование жизненно важных систем

Свойство вероятностей независимых событий применяется в технике для многократного понижения вероятностей отказов жизненно важных систем. Простейший пример — автомобильные тормоза. Сейчас автомобили оснащаются двумя независимыми тормозными системами. Отказ в каждой системе может произойти независимо от работоспособности второй системы.

Это усложнение конструкции оправдано. Оно снижает вероятность полного отказа тормозов до пренебрежимо малой величины.

Предположим, что вероятность отказа каждой из двух тормозных систем равна $p = 0{,}0001$. Это означает, что в среднем на 10 000 нажатий педали тормоза случается один отказ. При том огромном количестве автомобилей, которые сейчас заполняют крупные города, такая вероятность отказа приводила бы к ежедневным многочисленным авариям. Что же даёт дублирование тормозной системы? При наличии двух независимых тормозных контуров полный отказ системы произойдёт, только если откажут оба контура, то есть если A_1 — отказ первого контура, а A_2 — отказ второго контура, то тормоза полностью отказывают при наступлении события $A_1 \cap A_2$. В силу независимости вероятность этого события равна

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(A_2) = p^2 = 10^{-8}.$$

Эта вероятность пренебрежимо мала. Получается, что отказ тормозов — практически невозможное событие.

Задача теперь заключается в том, чтобы оба контура были исправны. Для этого существуют регламентные технические обслуживания.

Дублирование является важнейшим принципом при проектировании автомобилей, судов или самолётов, электростанций, больниц и других объектов, где отказ оборудования может вызвать жертвы или очень большие потери.

В природе также встречается дублирование важных систем: например, большинство высших животных имеет два органа слуха, два независимых органа зрения.

Вопросы

1. Сформулируйте определение двух независимых событий.

2. Если события A и B независимы, то чему равна условная вероятность события A при условии B?

3. Приведите примеры дублирования жизненно важных систем в природе и в технике.

Упражнения

159. Докажите, что если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$ также независимы

160. События A и B таковы, что A происходит всегда, когда происходит B. Чему равна условная вероятность события A при условии B?

161. В компьютерной игре пять последовательных этапов. Вероятность пройти каждый этап (после того как пройден предыдущий) равна 0,1. Изобразите дерево вероятностей этого случайного эксперимента. Найдите вероятность того, что игрок дойдёт до третьего этапа, но не преодолеет четвёртый.

162. На рис. 20 изображено дерево вероятностей некоторого эксперимента. Найдите вероятность события:

а) A; б) B; в) $A \cup B$; г) $\overline{A}$; д) $A \cap B$.

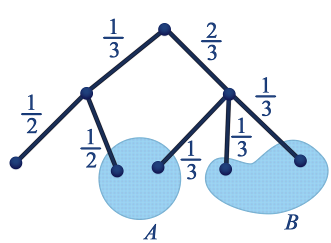


Рис. 20

163. На рис. 21 изображено дерево вероятностей некоторого эксперимента. Найдите вероятность события:

а) A; б) B; в) $A \cup B$; г) $\overline{A}$; д) $A \cap B$.

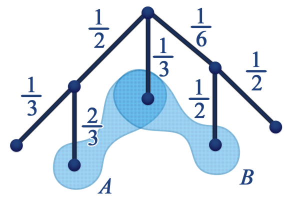


Рис. 21

164. Сергей подготовил только первый билет из двадцати. Билеты на экзамене достаются случайно и по очереди. Сергей тянет билет вторым.

а) Найдите вероятность того, что Сергею достанется первый билет.

б) Повлияло ли на вероятность вытянуть первый билет то, что Сергей был вторым?

165. Среди аккумуляторов, сделанных на заводе А., 20% имеют скрытый дефект. Среди аккумуляторов, сделанных на заводе Б., 10% имеют скрытый дефект. Завод А. поставляет на рынок 40% всех аккумуляторов, остальные аккумуляторы поставляет завод Б. Покупатель не выбирает производителя, а берёт аккумулятор, имеющийся в наличии. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор окажется качественным (не имеет дефектов).

166. Стрелок делает три выстрела по мишени. Вероятность поразить мишень при каждом выстреле равна 0,7 независимо от результатов предыдущих выстрелов. Изобразите дерево вероятностей этого эксперимента и найдите вероятность того, что мишень будет поражена:

а) хотя бы один раз;

б) ровно два раза;

в) хотя бы два раза при условии, что первый выстрел закончился попаданием.

167. Вероятность поразить мишень при одном выстреле равна 0,7. Стрелок делает три выстрела. Рассмотрим события

$$A = \{\text{первые два выстрела удачные}\},$$
$$B = \{\text{все три выстрела удачные}\}.$$

Найдите: а) $\mathrm{P}(A)$; б) $\mathrm{P}(B)$; в) $\mathrm{P}(A \cap B)$; г) $\mathrm{P}(B|A)$.

168. В некоторой местности вероятность устойчивой сотовой связи равна 0,3. Если связь устойчивая, то СМС отправляется с вероятностью 0,99. Если связь неустойчивая, то СМС отправляется с вероятностью 0,75.

а) Изобразите дерево вероятностей этого эксперимента.

б) Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена.

169. На рис. 22 изображено дерево вероятностей некоторого эксперимента. Начальное состояние S. Найдите вероятность события N.

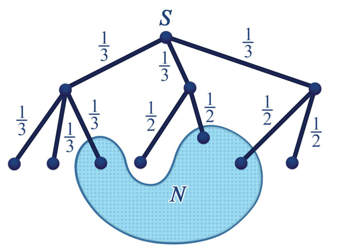


Рис. 22

170. Случайный опыт состоит в двукратном бросании симметричной монеты. Изобразите дерево вероятностей этого опыта. Пользуясь деревом, найдите вероятность события ОР.

171. Случайный опыт состоит в стрельбе по мишени. Стрелок делает всего два выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,8, при втором — 0,9. Нарисуйте дерево вероятностей этого эксперимента и найдите вероятность исхода «первый выстрел неудачный, второй удачный».

172. На рис. 23 изображена схема дорожек. Пешеход выходит из точки S и двигается по дорожкам, случайно выбирая дорожку на каждой развилке (но не возвращаясь обратно). Найдите вероятность того, что пешеход попадёт в точку M.

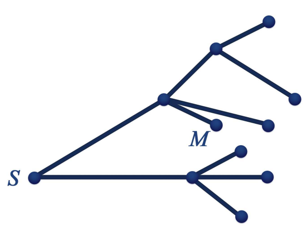


Рис. 23

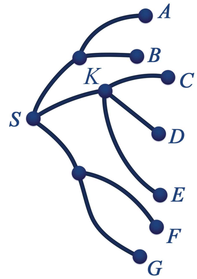


Рис. 24

173. На рис. 24 показана схема дорожек в парке. Пешеход начинает прогулку по парку из точки S. На каждой развилке он выбирает дальнейший путь случайно (но не поворачивает назад). Найдите вероятность того, что он:

а) придёт в точку E; б) придёт в одну из точек B или C;

в) придёт в точку E при условии, что он уже пришёл в точку K;

г) попадёт в одну из точек B или F при условии, что он пришёл в точку K.

174. На рис. 25 изображена схема дорожек. Пешеход выходит из точки S и двигается по дорожкам, случайно выбирая дорожку на каждой развилке (но не возвращаясь обратно). Событие A выделено на рисунке — оно состоит в том, что пешеход попал в одну из трёх точек.

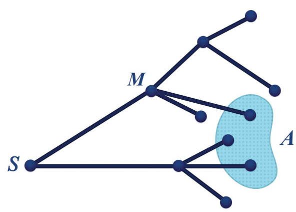


Рис. 25

Найдите: а) вероятность события A;

б) вероятность события A при условии, что пешеход пришёл в точку M.

175. Заказ на печать книги издательство разместило в двух типографиях — А и Б. Типография А печатает 60% тиража, типография Б — оставшиеся экземпляры. Книга может оказаться с браком (перепутанные или перевёрнутые страницы, обложка от другой книги и т. п.). В типографии А вероятность брака книги равна 0,02, в типографии Б вероятность брака 0,04. Найдите вероятность того, что случайная книга, купленная в магазине, будет бракованной.

176. Одна из страховых компаний провела анализ в области страхования автомобилей. В результате анализа выявлено три факта:

1) 80 % клиентов — опытные водители (со стажем вождения больше 2 лет); 20 % клиентов — неопытные водители;

2) вероятность того, что с опытным водителем на протяжении года произойдёт страховой случай, равна 0,015;

3) вероятность того, что страховой случай в течение года произойдёт с неопытным водителем, равна 0,034.

Опираясь на эти данные, изобразите дерево вероятностей и найдите вероятность того, что со случайно выбранным водителем — клиентом этой компании не произойдёт страховой случай в течение года.

177. Симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы один орёл.

178. Симметричную монету бросают три раза. Найдите вероятность того, что наступит элементарный исход ОРО.

179. В автомобиле две независимые тормозные системы. Вероятность того, что одна система откажет при торможении, равна 0,00001. Такая же вероятность отказа второй системы. Рассмотрим события

$$A = \{\text{отказ первой системы}\}, \quad B = \{\text{отказ второй системы}\}.$$

а) Запишите формулой событие «обе системы откажут при торможении».

б) Найдите вероятность того, что обе тормозные системы случайно откажут.

в) Найдите вероятность события B при условии A.

г) Во сколько раз вероятность $\mathrm{P}(B|A)$ выше, чем $\mathrm{P}(A \cap B)$? Чем можно объяснить это отличие?

180. В отделении банка стоят два круглосуточных банкомата. Утром каждый из них неисправен с вероятностью 0,05. Найдите вероятность того, что утром хотя бы один банкомат исправен.

181. Эксперимент состоит в четырёхкратном бросании симметричной монеты. Найдите вероятность исхода РРОР.

182. Стрелок стреляет последовательно четыре раза по мишеням, при этом результаты предыдущих выстрелов не сказываются на последующих. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,7, при втором и последующих выстрелах вероятность попадания равна 0,9. Обозначим попадание буквой П, промах — буквой Н. Найдите вероятность элементарного исхода ННПП.

183. В интернет-магазине три телефонных оператора. В случайный момент оператор занят разговором с клиентом с вероятностью 0,7, независимо от других.

Клиент звонит в магазин. Найдите вероятность того, что в этот момент все операторы заняты.

184. В тесте по химии три части. Чтобы пройти тест, учащийся должен получить не менее 6 баллов за каждую часть. Учащийся В. лучше подготовлен к первой части — вероятность получить не менее 6 баллов за первую часть равна 0,9, за вторую — 0,5, за третью — 0,4. Найдите вероятность того, что учащийся В. не пройдёт тест.

185. Системный администратор обслуживает три независимых сервера. Вероятность того, что в течение дня первый сервер потребует вмешательства, равна 0,3. Вероятность того, что второй сервер потребует вмешательства, равна 0,2. Вероятность того, что третий сервер потребует вмешательства, равна 0,1. Найдите вероятность того, что в течение случайного взятого дня ни один из серверов не потребует вмешательства.

186. В банке три окна работы с клиентами. В случайный момент вероятность того, что окно закрыто (нет оператора, неисправно оборудование и т. п.), равна 0,9. Окна работают независимо друг от друга. В банк заходит клиент. Найдите вероятность того, что в этот момент работает хотя бы одно окно.

187. В семье два ребёнка. Известно, что один из детей — мальчик. Найдите вероятность того, что второй ребёнок девочка (считайте, что вероятности рождения мальчиков и девочек одинаковы).

188. В семье два ребёнка разного возраста. Известно, что старший — мальчик. Найдите вероятность того, что младший ребёнок девочка (считайте, что вероятности рождения мальчиков и девочек одинаковы).

189. Стрелок делает три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что:

а) будет ровно два попадания;

б) будет ровно два попадания при условии, что первый выстрел успешный;

в) будет ровно два попадания при условии, что первый выстрел неудачный.

190. Многократно подбрасывая игральную кость, суммируют выпавшие очки. Найдите вероятность того, что в какой-то момент сумма выпавших очков была равна 3.

191*. Игральную кость бросили несколько раз. Известно, что в какой-то момент сумма выпавших очков стала равна 3. Найдите вероятность того, что к этому моменту было сделано ровно: а) три броска; б) два броска; в) один бросок.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 190.

Глава IV

Случайные величины и распределения

§ 7. Случайные величины

7.1. Определение и примеры

С величинами мы встречаемся очень часто. Обычно они возникают в результате измерений или вычислений. На самом деле многие из них являются случайными величинами — то есть их значения получаются в случайном эксперименте.

Погрешности приборов и другие случайные факторы превращают результаты измерений в случайные величины.

Типичный пример — результаты измерения артериального давления человека. Инструкция к тонометру[1] рекомендует провести измерения несколько раз через определённые интервалы времени и усреднить результаты. Одного измерения недостаточно, поскольку результаты измерений неустойчивы из-за действия случайных факторов, которые мы не можем учесть.

Определение. ***Случайной величиной*** называется величина, значение которой определяется исходом случайного эксперимента.

Мы будем обозначать случайные величины большими латинскими буквами X, Y и т. п., а их значения при необходимости — малыми латинскими буквами. Например, можно написать $X = a$, $Y = b$ и т. п.

Пример 1. Рассмотрим случайный эксперимент, в котором монету бросают два раза. Рассмотрим случайную величину X — число выпавших орлов. Этот случайный эксперимент может закончиться одним

Эл. исход	ОО	ОР	РО	РР
X	2	1	1	0

из четырёх элементарных событий: РР, РО, ОР, ОО. В зависимости от того, чем закончится этот эксперимент, случайная величина X примет значение 0, 1 или 2.

[1] Тонометр — прибор для измерения давления.

Обратите внимание — элементарный исход эксперимента и случайная величина — разные объекты. В опыте наступает исход, а этому исходу соответствует значение случайной величины. Иногда разные исходы порождают одинаковые значения случайной величины — как в приведённом примере, когда исходы ОР и РО дали одно и то же значение $X = 1$.

Пример 2. Правильную игральную кость бросают два раза. Определим случайную величину X как наименьшее из выпавших очков. Например, если выпали числа 3 и 2, то $X = 2$, а если выпало 6 и 6, то $X = 6$. Множество элементарных событий этого эксперимента представим таблицей, в каждую ячейку которой впишем соответствующее значение X (см. рис. 26).

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

Рис. 26

Мы видим, что значение 1 случайная величина X принимает при 11 различных исходах эксперимента, значение 2 получается при 9 исходах и т. д.

Можно считать, что ***случайная величина — это числовая функция, определённая на множестве элементарных событий случайного эксперимента***. Какое значение примет случайная величина в ходе эксперимента, зависит от того, каким элементарным событием эксперимент закончится.

Если множество элементарных исходов эксперимента дискретное, то случайная величина, связанная с этим опытом, также будет иметь дискретное множество значений. Например, при бросании игральной кости всего шесть элементарных исходов, и столько же значений имеет случайная величина «число выпавших очков». В этом же эксперименте можно рассмотреть другую случайную величину, которая принимает всего два значения: 0, если число выпавших очков чётно, и 1, если число выпавших очков нечётно.

В любом случае количество значений случайной величины не больше, чем количество элементарных исходов опыта, с которым эта величина связана.

Если случайная величина X приняла в ходе опыта какое-нибудь значение a, то это событие можно записать как $X = a$. Оно имеет некоторую вероятность.

Пример 3. При двух бросаниях игральной кости случайная величина S, равная сумме выпавших очков, принимает целые значения от 2 до 12. Вероятности этих значений не одинаковы.

Найдём некоторые вероятности, например $\mathrm{P}(S=2)$ и $\mathrm{P}(S=4)$.

Значение $S=2$ возникает только при одном исходе $(1;1)$ (см. рис. 27 *а*). Поэтому вероятность события $S=2$ равна $\frac{1}{36}$.

Значение $S=4$ возникает при трёх равновозможных исходах $(1;3)$, $(2;2)$ и $(3;1)$ (рис. 27 *б*).

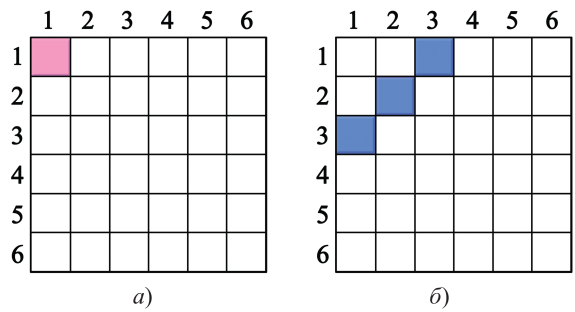


Рис. 27. Элементарные исходы, соответствующие событиям а) $S=2$ и б) $S=4$

Число благоприятствующих элементарных событий равно 3, значит,

$$\mathrm{P}(S = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Пример 4. Постоянная величина. Постоянную величину можно рассматривать как случайную величину, которая принимает единственное значение с вероятностью 1.

Упражнения

192. Рассмотрите случайную величину S, равную числу выпавших орлов при двух бросаниях монеты.

а) Какие значения принимает случайная величина S?

б) Считая монету симметричной, найдите вероятность события $S=0$.

в) Найдите вероятности всех возможных событий $S = k$ этого опыта и заполните таблицу.

k			
$\mathrm{P}(S = k)$			

193. Рассмотрите случайную величину S — число выпавших орлов при трёх бросаниях монеты.

а) Какие значения принимает случайная величина S? Заполните первую строку таблицы.

б) Считая монету симметричной, найдите вероятность события $S = 2$.

в) Найдите вероятности всех возможных событий $S = k$ в этом опыте и заполните таблицу.

k				
$\mathrm{P}(S = k)$				

194. Опыт состоит в однократном бросании игральной кости.

а) Какие значения принимает случайная величина X — квадрат выпавшего числа очков?

б) Найдите вероятность события $X = 16$.

195. Опыт состоит в двукратном бросании симметричной игральной кости. Найдите и запишите в таблицу значения и вероятности случайных величин:

а) X — наибольшее из выпавших очков;

б) Y — наименьшее из выпавших очков;

в) S — сумма выпавших очков;

г) T — разность выпавших очков (результат первого броска минус результат второго броска);

д) M — произведение чисел выпавших очков.

196. Опыт состоит в стрельбе по мишени. Рассмотрим случайную величину X — число выстрелов до первого промаха. Какие значения принимает эта случайная величина?

197. В классе 26 учащихся. Какие значения принимает случайная величина X — число учащихся, пришедших в школу первого сентября? Опираясь на собственный опыт, ответьте на вопрос: какое из событий $X = 23$ и $X = 9$ более вероятно?

198. В классе 26 учащихся. Какие значения принимает случайная величина X — число учащихся, присутствующих на уроке? Опираясь на собственный опыт, ответьте на вопрос: какое из событий $X = 26$ и $X = 19$ более вероятно во время эпидемии гриппа?

199. Пусть случайная величина Y — температура воздуха в жилой комнате. Опираясь на собственный опыт, ответьте на вопросы.

а) Какие значения можно приписать этой случайной величине?

б) Какой интервал значений более вероятен для случайной величины Y: от $10°C$ до $15°C$ или от $15°C$ до $22°C$?

200. В классе 25 учащихся, из которых 10 юношей. Случайным образом выбраны 2 человека. Случайная величина X — число отобранных юношей.

а) Какие значения может принимать случайная величина X?

б) Найдите вероятность того, что $X = 1$.

201. В классе 30 учащихся, из которых 13 юношей. Случайным образом выбраны 3 человека. Случайная величина X — число отобранных юношей.

а) Какие значения может принимать случайная величина X?

б) Найдите вероятность того, что $X = 0$.

202. Учащийся отвечает на вопросы теста, в котором всего 25 вопросов. За каждый верный ответ учащийся получает один балл.

а) Какие значения принимает случайная величина Z — число полученных баллов?

б) Можно ли сравнить вероятности событий $Z = 3$ и $Z = 22$, не зная ничего больше?

203. Найдите вероятность события $X < 4$, где X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости.

204. Найдите вероятность события $S < 4$, где S — сумма очков при двукратном бросании игральной кости.

205. Надёжность электроприборов измеряют в часах работы до отказа (наработка на отказ). Например, на упаковке электролампы может быть указано, что средняя наработка на отказ 2000 часов. (см. рис. 28).

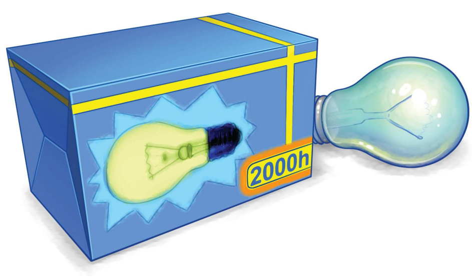


Рис. 28

а) Означает ли это, что новая лампочка не может перегореть через два часа после включения?

б) Пусть случайная величина X — число часов работы до отказа для такой электролампы. Сравните вероятности событий $X > 10$ и $X > 20$.

206. Для социологического опроса случайным образом отбирают 1600 жителей большого города. Определим случайную величину X как число мужчин, попавших в выборку.

а) Какие значения может принимать X?

б) Велика ли вероятность того, что $X = 0$?

7.2. Сложение и умножение случайных величин

Случайные величины можно складывать. В результате получается новая случайная величина. Сумму величин X и Y записывают как $X + Y$.

Предположим, что две случайные величины X и Y связаны с одним и тем же опытом. Тогда каждому элементарному исходу опыта ставится в соответствие два числа $X = a$ и $Y = b$, и величина $a + b$ есть значение суммы $X + Y$, соответствующее этому элементарному исходу.

Аналогично получаются значения разности, произведения и частного двух случайных величин.

Поясним сказанное на примере.

Пример 5. Предположим, что случайная величина X принимает значения $-3, 0, 2$, а случайная величина Y принимает значения $1, 3, 5, 8$.

Тогда случайная величина $X + Y$ может принимать значения

$$\begin{array}{llll} -3+1=-2; & -3+3=0; & -3+5=2; & -3+8=5; \\ 0+1=1; & 0+3=3; & 0+5=5; & 0+8=8; \\ 2+1=3; & 2+3=5; & 2+5=7; & 2+8=10. \end{array}$$

Выпишем значения в ряд:

$$-2,\ 0,\ 2,\ 5,\ 1,\ 3,\ 5,\ 8,\ 3,\ 5,\ 7,\ 10.$$

Обратим внимание на то, что в этом ряду некоторые числа повторяются: число 3 встречается дважды, а число 5 — трижды. Нет никакой нужды записывать одинаковые значения несколько раз. Уберём повторы и заодно запишем ряд значений по возрастанию. Итак, возможные значения случайной величины $X + Y$:

$$-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10.$$

Мы ничего не можем сейчас сказать о вероятностях этих значений, поскольку не знаем, связаны ли величины X и Y друг с другом и какова эта связь. Подчеркнём, что мы говорим лишь о возможных значениях; может случиться так, что некоторые из них имеют нулевые вероятности.

Упражнения

207. Значения случайных величин X и Y определены, как в примере 5. Какие значения может принимать случайная величина:

а) $X - Y$; б) XY.

208. В некотором эксперименте наблюдаются две случайные величины X и Y. Случайная величина X принимает значения 0, 1 или 2, а случайная величина Y принимает одно из значений -1 и 1. Найдите множество значений случайной величины:

а) $X + Y$; б) XY; в) $X + 2Y$; г) $2X + Y - 1$; д) $\frac{X}{Y}$; е) $\frac{Y}{X+1}$.

209. Расходы страховой компании при выплате страховой премии по некоторому полису — случайная величина, которая может принимать значения 0 рублей (если выплаты нет), 10 000 рублей (небольшая выплата) и 40 000 рублей (большая выплата). Найдите возможные суммарные значения выплат по трём таким полисам.

210. Игральную кость бросают два раза. Найдите возможные значения случайной величины «сумма выпавших очков».

§ 8. Распределение вероятностей

Напомним, что если случайная величина получает свои значения в опыте с дискретным множеством элементарных событий, то множество значений этой случайной величины также дискретно. Таким образом, можно говорить о вероятностях отдельных значений дискретной случайной величины.

Единичная вероятность каким-либо образом распределяется между всеми значениями дискретной случайной величины. Получается ***распределение вероятностей*** случайной величины. Распределение вероятностей удобно задавать таблицами, диаграммами, графиками, а иногда — формулами.

Пример 6. Вернёмся к двукратному бросанию игральной кости и рассмотрим уже упомянутую случайную величину S, равную сумме выпавших очков. Она может принимать целые значения от 2 до 12 (см. пример 3).

Найдём распределение вероятностей случайной величины S. Если игральные кости правильные, то все 36 элементарных исходов опыта равновозможны, и потому вероятность каждого из них равна $\frac{1}{36}$. Чтобы найти вероятность события $S = a$, нужно подсчитать количество таких элементарных исходов $(x; y)$, что $x+y=a$, и их число разделить на 36. Например, событию $S=6$ благоприятствует 5 элементарных исходов. Поэтому $\mathrm{P}(S=6)=\frac{5}{36}$.

Представим распределение вероятностей случайной величины S таблицей. В верхней строке перечислены значения S, в нижней строке указаны их вероятности.

Распределение вероятностей

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{P}(S=a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Распределение вероятностей дискретной случайной величины можно наглядно изображать с помощью диаграммы. На рис. 29 *в* показана диаграмма распределения случайной величины S из этого примера.

Полезно убедиться, что сумма всех вероятностей в этом распределение равна 1, как и должно быть.

Вероятности любых событий, которые можно определить с помощью случайной величины, можно найти, если знать её распределение вероятностей. Найдём, например, $\mathrm{P}(5 \leqslant S \leqslant 8)$ и $\mathrm{P}(S \geqslant 7)$:

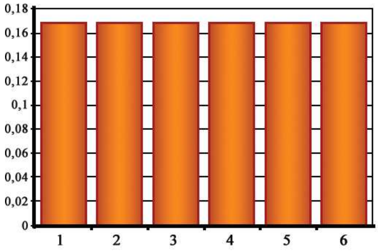
$$\mathrm{P}(5 \leqslant S \leqslant 8)=\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9};$$

$$\mathrm{P}(S \geqslant 7)=\frac{1}{36}(6+5+4+3+2+1)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}.$$

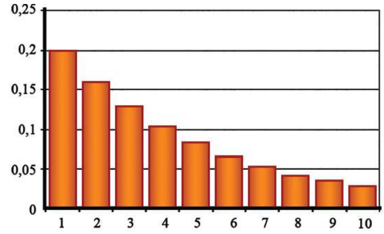
Две разные случайные величины могут иметь одинаковые распределения. Бросим кость два раза. Две случайные величины «число очков на первой кости» и «число очков на второй кости» выглядят одинаковыми и имеют одинаковые распределения, но не совпадают, потому что они относятся к разным броскам.

Обычно для записи распределений используют таблицы без графления, а значения и вероятности записывают двумя строчками. Например, распределение случайной величины S из приведённого примера удобно записать так:

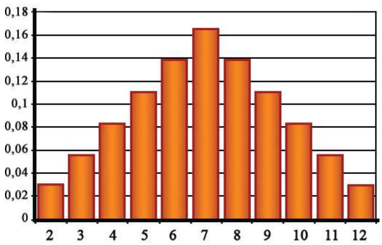
$$S \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$



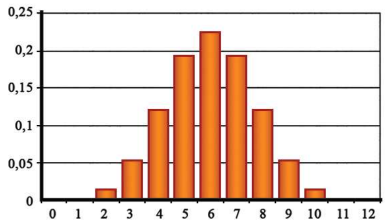
а) Дискретное равномерное распределение. Так распределена, например, случайная величина «число очков, выпавшее на одной кости».



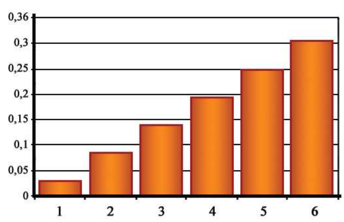
б) Геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}2$. Так распределена, например, случайная величина «число выстрелов до первого попадания по мишени», если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2. Высота каждого следующего столбика составляет 0,8 высоты предыдущего.



в) Распределение случайной величины «сумма очков при двух бросаниях игральной кости». Наибольшая вероятность у суммы 7.



г) Биномиальное распределение с параметрами $n = 12$, $p = 0{,}5$. Так распределена, например, случайная величина «число орлов при 12 бросаниях монеты».



д) Распределение случайной величины «наибольшее из очков, выпавших при двукратном бросании кости».

Рис. 29. Примеры дискретных распределений

Пример 7. Предположим, что человек бросает монету до тех пор, пока не выпадет орёл. Случайная величина Y, равная числу бросков, может принять любое натуральное значение.

Найдём распределение величины Y.

Значение 1 возникает, если сразу выпал орёл. Вероятность этого $\frac{1}{2}$.

Значение 2 возникает, если в первый раз выпала решка, а во второй раз — орёл. В силу независимости бросков вероятность этого равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Рассуждая так же и дальше, получаем распределение

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots & \frac{1}{2^k} & \dots \end{pmatrix}.$$

Вместо таблицы можно записать формулу:

$$\mathrm{P}(Y = k) = 0{,}5^k.$$

Заметим, что в этом распределении вероятности образуют геометрическую прогрессию. По этой причине такие распределения называют ***геометрическими распределениями***. Знаменатель геометрической прогрессии называют параметром геометрического распределения. В приведённом примере параметр $p = 0{,}5$. Подробно геометрические распределения обсуждаются в главе VIII.

Якоб Бернулли (1654—1705)

На рис. 29 *б* показана диаграмма геометрического распределения с параметром $p = 0{,}2$.

Пример 8. Распределение Бернулли. Важную роль в теории вероятностей играет очень простая случайная величина — число успехов при одном испытании, в котором возможно лишь два исхода: успех или неудача. Если обозначить вероятность успеха p, то вероятность неудачи равна $1 - p$. Распределение такой случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Это распределение называют ***распределением Бернулли*** по имени Якоба Бернулли. Вероятность успеха p является параметром распределения и может принимать разные значения. Если испытание — бросание симметричной монеты, то $p = 0{,}5$.

Пример 9. В упражнении 195 а) нужно было найти распределение случайной величины X — наибольшего из двух выпавших очков при двукратном бросании игральной кости. Наибольшее значение 1 бывает при единственном элементарном исходе $(1;1)$, значение 2 будет при одном из трёх исходов: $(1;2)$, $(2;1)$ и $(2;2)$. Рассуждая так же и дальше, получаем распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

Диаграмма этого распределения изображена на рис. 29 *д*. Вероятности образуют арифметическую прогрессию: $\mathrm{P}(M=k)=\frac{2k-1}{36}$. Можно убедиться, что сумма вероятностей равна единице. По формуле суммы первых членов арифметической прогрессии

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}+\frac{11}{36}\right)\cdot 6 = 3\cdot\frac{12}{36} = 1.$$

То, что сумма равна единице, нас не удивляет — так и должно быть, но эта проверка косвенным образом подтверждает, что в рассуждениях нет ошибок и все вероятности найдены правильно.

Пример 10. Школьник сдаёт тест из 10 вопросов. Он хорошо знает материал и правильно отвечает на все вопросы, однако с некоторой вероятностью может сделать случайную ошибку в задании. Будем считать, например, что вероятность случайного неверного ответа 0,05 (5 %).

Число данных верных ответов — случайная величина, которая принимает целые значения от 0 до 10. Распределение этой случайной величины (значение вероятностей округлены до тысячных):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0{,}010 & 0{,}075 & 0{,}315 & 0{,}599 \end{pmatrix}.$$

Поставим вопрос — за что следует ставить пятёрку?

Вероятность того, что все 10 ответов будут верными, не такая уж большая — 0,599, то есть даже хороший школьник не может определённо рассчитывать на полный успех.

Вероятность того, что школьник даст от 8 до 10 верных ответов, равна $0{,}075+0{,}315+0{,}599=0{,}989$. Это намного больше, чем 0,599. Теперь вероятность случайного провала приблизительно равна 0,011. Событие со столь малой вероятностью будем считать практически невозможным. Таким образом, для того чтобы хорошо подготовленный школьник почти наверняка выполнил тест, следует ставить пятёрку за 8 или больше верных ответов. Именно так некоторое время назад строилась экзаменационная работа по алгебре за 9 класс.

Такой же логике подчиняется определение итоговых отметок в государственной итоговой аттестации.

Можно, конечно, сделать порог «на пятёрку» ниже, но тогда значительно повышается вероятность того, что ученик, который подготовлен слабее, случайно получит пятёрку.

Упражнения

211. Мы отмечали, что постоянную величину можно рассматривать как случайную величину с единственным значением. Постройте распределение постоянной величины, равной a.

212. В таблице дано распределение случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & p & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Одна из вероятностей p неизвестна. Найдите её.

213. Дано распределение $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Запишите события в виде объединения событий вида $X = a$:

а) $X < 3$; б) $0 \leqslant X < 4$; в) $X \geqslant -0{,}3$.

214. Дано распределение $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

Найдите вероятности событий:

а) $X = -1$; б) $X = 0$; в) $-0{,}5 \leqslant X \leqslant 3$.

215. Дана случайная величина

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Составьте распределение случайной величины:

а) $Y = X + 2$; б) $Y = 2X - 1$; в) $Z = 30 - X$; г) $Z = \dfrac{7 - 3X}{2}$.

216. Биатлонист на огневом рубеже делает пять выстрелов по пяти разным мишеням. Рассмотрим случайную величину X — число попаданий:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0{,}007 & 0{,}05 & 0{,}205 & 0{,}410 & 0{,}328 \end{pmatrix}.$$

а) Постройте распределение случайной величины Y — числа промахов.

б) Найдите вероятность того, что биатлонист поразит мишень более трёх раз.

в) Найдите вероятность того, что биатлонист промахнётся более одного раза.

217. Составьте распределение случайной величины X — числа орлов, выпавших при бросании одной монеты.

218. Составьте распределение случайной величины X — числа орлов, выпавших при бросании двух монет.

219. Правильную монету бросают четыре раза. Случайная величина X — число выпавших орлов.

а) Составьте распределение случайной величины X.

б) Найдите вероятность события $X \leqslant 1$.

в) Найдите вероятность события $X < 4$.

г) Найдите вероятность события $1 < X < 4$.

220. Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X — произведение выпавших очков.

а) Составьте распределение случайной величины X.

б) Найдите вероятность события $5 \leqslant X \leqslant 16$.

в) Найдите вероятность события $X \leqslant 10$.

г) Найдите вероятность события $X \geqslant 10$.

221*. В классе 25 учащихся. Из них 10 мальчиков. Случайным образом выбирают четырёх человек. Случайная величина X — число выбранных мальчиков. Найдите распределение этой случайной величины.

222*. Случайная величина X имеет геометрическое распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & \dots \\ p & qp & q^2p & q^3p & \dots & q^{k-1}p & \dots \end{pmatrix},$$

где $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$. Проверьте, что сумма всех вероятностей равна 1.

223. Игральную кость бросают дважды. Найдите распределение случайной величины X «остаток от деления суммы выпавших очков на 5».

224. В тесте по математике 12 заданий. Слабо подготовленный учащийся даёт верный ответ на каждое такое задание с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что число верных ответов, которые он даст, будет не менее:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

225. Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}6$.

а) Составьте распределение для первых пяти значений случайной величины X.

б) Найдите вероятность того, что $X < 4$.

в) Найдите вероятность того, что $X > 2$.

226. Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}3$.

а) Составьте распределение для первых 10 значений случайной величины X.

б) Какова вероятность того, что $X \leqslant 5$?

в) Найдите вероятность того, что $X \geqslant 7$.

227. Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Сколько нужно дать стрелку патронов, чтобы он поразил мишень с вероятностью не менее 0,95?

§ 9. Характеристики случайных величин

Распределение вероятностей случайной величины даёт полное описание этой величины и её вероятностных свойств. Однако на практике часто можно ограничиться лишь несколькими количественными характеристиками случайных величин. К ним обычно относят математическое ожидание (среднее значение), дисперсию и стандартное отклонение.

Пример 11. Социологи часто выясняют, какая доля людей в обществе обладает некоторым признаком (придерживается определенных взглядов, относится к той или иной социальной группе и т. п.).

Для этого составляют и опрашивают выборку из нескольких сот или тысяч людей. Доля опрошенных, обладающих этим признаком, - случайная величина, которая может принимать разные значения в зависимости от состава выборки. Но важнее знать не распределение этой случайной величины, а ее математическое ожидание, которое покажет, насколько распространен изучаемый признак во всём обществе.

Пример 12. Выплаты страховых компаний при наступлении страхового случая зависят от размера ущерба. Поэтому выплата является случайной величиной. Построить распределение этой случайной величины непросто. Однако страховщикам нужно знать средний размер и средние колебания выплат на каждый страховой полис. От этих величин сильно зависит стоимость страховки. И в этом случае ответ на вопрос о среднем дают математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины «страховая выплата».

Пример 13. Число покупателей в магазине — случайная величина. Важно знать её среднее значение в определённое время, чтобы обеспечить необходимое число кассиров. Если кассиров мало, то магазин понесёт убытки от потери покупателей, которые не хотят стоять в длинной очереди. Если же кассиров слишком много, то убытки наступят от избыточных затрат на заработную плату.

9.1. Математическое ожидание

Определение. ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины называют сумму произведений значений этой величины на соответствующие вероятности.

Математическое ожидание случайной величины X обозначают $\mathrm{E}(X)$ или $\mathrm{E}X$ (скобки часто опускают). Обозначение E происходит от первой буквы латинского слова Expectatio — «ожидание».

Пусть случайная величина X имеет распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}.$$

Тогда по определению

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n.$$

Здесь суммирование производится по всем произведениям x_kp_k.

Число слагаемых может быть конечным, а может быть бесконечным, в зависимости от того, конечное или счётное множество значений у этой случайной величины. Бывает так, что счётная случайная величина имеет вполне определённое математическое ожидание, хотя у неё бесконечное множество значений[1].

Пример 14. Найдём математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании правильной игральной кости.

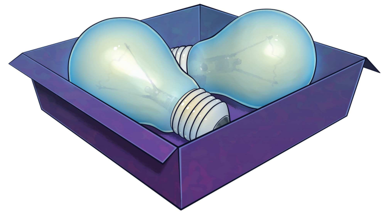
Решение. Число очков при однократном бросании — случайная величина X с распределением

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Значит, математическое ожидание равно

$$\mathrm{E}X = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

[1] Некоторые случайные величины с бесконечным множеством значений не имеют математического ожидания. Чтобы понять, как это происходит, выполните упражнение 238*.



Пример 15. В коробке две электрические лампочки, из которых только одна исправная. Лампочки из коробки извлекают по одной, пока не появится годная лампочка. Ясно, что число вынутых лампочек — случайная величина. Найдём её математическое ожидание.

Решение. Построим множество элементарных событий этого эксперимента:

$$\text{ИН} \quad \text{или} \quad \text{НИ}.$$

(Буква И означает исправную лампочку; неисправная лампочка обозначается Н.) При случайном извлечении лампочек обе последовательности равновозможны и поэтому имеют равные вероятности $\frac{1}{2}$.

Множество элементарных событий построено, и вероятности определены. Пусть X — число лампочек, которые надо извлечь. Для первого элементарного события $X=1$, для второго $X=2$. Отсюда

$$\mathrm{E}X = 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Упражнение. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей распределение Бернулли $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, равно p. Докажите самостоятельно.

Пример 16. Страховая премия (стоимость страховки) равна 1100 рублей. При наступлении страхового случая страховая компания выплачивает клиенту (страхователю) 100 000 рублей. Вероятность наступления страхового случая равна 0,01. Нужно найти средний доход компании от продажи одного страхового полиса. Обозначим через X случайную величину «доход компании от продажи одного полиса». Она имеет распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} -99\,900 & 1100 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}.$$

Найдём математическое ожидание: $\mathrm{E}X = -99900\cdot 0{,}01 + 1100\cdot 0{,}99 = 90$. Другими словами, в среднем с одного страхового договора компания получает 90 рублей. Если математическое ожидание дохода оказалось бы отрицательным, это значило бы, что компания работает себе в убыток.

Упражнения

228. Найдите математическое ожидание случайной величины, распределённой по закону Бернулли:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.

229. Найдите математическое ожидание случайной величины, заданной распределением:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 5 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

230. Найдите математическое ожидание случайной величины, заданной равномерным дискретным распределением:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

231. Найдите математическое ожидание случайной величины, принимающей целые значения от -2 до 17 с равными вероятностями.

232. Найдите математическое ожидание случайной величины «число очков на одной игральной кости».

233. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) число орлов, выпавшее при одном бросании монеты;

б) число орлов при двух бросаниях монеты.

234. Найдите математическое ожидание квадрата случайной величины:

а) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 5 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

235. Найдите математическое ожидание случайной величины, подчинённой геометрическому распределению:

а) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & \ldots & \frac{2^{k-1}}{3^k} & \ldots \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ 0{,}1 & 0{,}09 & 0{,}081 & \ldots & 0{,}9^{k-1} \cdot 0{,}1 & \ldots \end{pmatrix}$.

236. В примере 9 на с. 81 составлено распределение случайной величины «наибольшее число очков, выпавших при двукратном бросании игральной кости»:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

237. В оптовом магазине минеральная вода продаётся либо поштучно, либо упаковками по 2 или 16 бутылок. Предпочтения покупателей этой воды известны:

вероятность покупки одной бутылки равна 0,74, упаковки из двух бутылок — 0,24, упаковки из 16 бутылок — 0,02. Сколько в среднем бутылок приходится на одного покупателя (математическое ожидание)?

238*. Случайная величина распределена по закону:

а) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ldots \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ldots \end{pmatrix}$.

Существует ли математическое ожидание у случайной величины X?

239. Случайная величина X имеет математическое ожидание a. Докажите, что математическое ожидание случайной величины $Y = X - a$ равно нулю.

240. По данным страховой компании вероятность того, что с клиентом страховой компании произойдёт страховой случай, равна 0,01. При наступлении страхового случая выплачивается страховая выплата — 10 000 рублей. Какой должна быть минимальная стоимость страховки, чтобы страховая компания в среднем получала с каждого клиента доход не менее 100 рублей?

Решение. Пусть X — страховая выплата. Это случайная величина, распределённая по закону Бернулли с параметром $p = 0{,}01$:

$$X \sim \begin{pmatrix} 10\,000 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}99 \end{pmatrix}.$$

Найдём её математическое ожидание:

$$\mathrm{E}X = 0{,}01 \cdot 10\,000 = 100.$$

Найденное математическое ожидание выражает среднюю выплату компании в расчёте на одного клиента (неважно, произошёл ли с ним страховой случай).

Следовательно, нужно сделать так, чтобы каждый клиент компенсировал эти затраты и дополнительно внёс не менее 100 рублей.

Итак, страховой полис должен стоить не менее $100 + 100 = 200$ рублей.

241. По данным страховой компании вероятность того, что с клиентом страховой компании произойдёт страховой случай, равна 0,015. При наступлении страхового случая выплачивается страховая выплата — 44 000 рублей. Какой должна быть минимальная стоимость страховки, чтобы страховая компания в среднем получала с каждого клиента доход не менее 300 рублей?

9.2. Некоторые свойства математических ожиданий

1°. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной: $\mathrm{E}a = a$.

Доказательство. Постоянная величина принимает единственное значение a с вероятностью 1. Математическое ожидание: $\mathrm{E}a = a \cdot 1 = a$. ◀

2°. Если $Y = aX + b$ (a и b — постоянные), то $\mathrm{E}Y = a\mathrm{E}X + b$.

Доказательство. Пусть случайная величина X имеет распределение

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Если $X = x_k$, то $Y = ax_k + b$. Значит, распределение случайной величины Y имеет вид

$$Y \sim \begin{pmatrix} ax_1 + b & ax_2 + b & \ldots & ax_k + b & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\mathrm{E}Y = (ax_1 + b)p_1 + (ax_2 + b)p_2 + \ldots = a(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots) + b(p_1 + p_2 + \ldots).$$

Учитывая, что $p_1 + p_2 + \ldots = 1$, получаем

$$\mathrm{E}Y = a\mathrm{E}X + b \cdot 1 = a\mathrm{E}X + b.$$ ◀

3°. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий, то есть

$$\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y.$$

Примем это свойство пока без доказательства.

Пример 17. Найдём $\mathrm{E}S$, где S — сумма очков при двукратном бросании кости.

Решение. Распределение случайной величины S уже составлено (см. пример 6 на с. 77 и рис. 29 *в* на с. 79). По определению

$$\mathrm{E}S = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36}.$$

Подсчёт даёт, что $\mathrm{E}S = 7$.

Свойство 3 позволяет получить этот же результат проще. Пусть X_1 — число очков, выпавшее на первой кости, X_2 — число очков на второй. Тогда $S = X_1 + X_2$. В предыдущем пункте мы вычислили математическое ожидание числа очков на одной кости: $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2 = 3{,}5$. Значит,

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}(X_1 + X_2) = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 = 3{,}5 + 3{,}5 = 7.$$

Пример 18. Найдём математическое ожидание числа орлов при трёх бросках монеты.

Решение. Случайная величина S равна сумме $X_1 + X_2 + X_3$, где X_1, X_2, X_3 — число орлов, выпавших соответственно при первом, втором и третьем бросках.

Случайные величины X_1, X_2, X_3 распределены по одному и тому же закону:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2 = \mathrm{E}X_3 = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \mathrm{E}X_3 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Заметим, что нам не пришлось вычислять распределение случайной величины S, чтобы найти её математическое ожидание. Мы обошлись распределениями величин X_1, X_2 и X_3, а также свойствами математического ожидания.

Упражнения

242. Случайная величина X принимает единственное значение 15. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y = 5X + 3$.

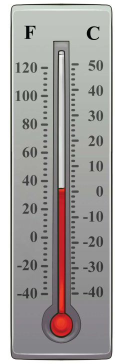
243. Для некоторых случайных величин X и Y известны математические ожидания: $\mathrm{E}X = 175$ и $\mathrm{E}Y = 165$. Найдите $\mathrm{E}Z$, если:

а) $Z = 3X - 2$; б) $Z = 5Y - 206$; в) $Z = X - Y$; г) $Z = \dfrac{X + Y}{2}$.

244. Хороший биатлонист попадает в мишень из положения лёжа с вероятностью 0,8, а из положения стоя с вероятностью 0,75. В гонке биатлонисту предстоит стрелять по 10 мишеням из положения лёжа и по 10 мишеням из положения стоя. На каждую мишень даётся одна попытка. Рассмотрим случайные величины X —

общее число попаданий по мишеням и Y — общее число промахов. Найдите $\mathrm{E}X$ и $\mathrm{E}Y$.

245. Рассмотрим две случайные величины: X — температура воздуха в градусах Цельсия и Y — температура воздуха в градусах Фаренгейта. Чтобы перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия, нужно вычесть из числа градусов Фаренгейта 32 и результат разделить на 1,8.



а) Выразите Y через X.

б) В некотором помещении математическое ожидание температуры воздуха равно 21°C. Найдите $\mathrm{E}Y$.

246. Случайная величина X — скорость автомобиля в километрах в час.

Случайная величина Y — скорость автомобиля в милях в час. В одной миле 1609 м.

а) Выразите Y через X.

б) На некотором участке дороги математическое ожидание скорости автомобиля $\mathrm{E}X = 84{,}5$ км/ч. Найдите $\mathrm{E}Y$ для этого же участка дороги.

247. Случайная величина X — вес человека в фунтах. Для некоторой совокупности людей производители мебели считают, что $\mathrm{E}X = 166$ английских фунтов. Один фунт равен 454 грамма. Найдите математическое ожидание веса человека в килограммах для той же совокупности. Результат округлите до килограммов.

248. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) сумма очков на двух костях;

б) модуль разности очков на двух костях;

в) наибольшее число очков;

г) наименьшее число очков;

Как найти ответ на вопросы в) и г), зная ответы на вопросы а) и б)?

249. Игральную кость бросают N раз. Найдите математическое ожидание суммы всех выпавших очков.

9.3. Дисперсия и стандартное отклонение

На практике важно знать не только среднее значение случайной величины (математическое ожидание), но и то, насколько сильно случайная величина может отклоняться от своего математического ожидания. В качестве мер рассеивания используют дисперсию и стандартное отклонение.

Пусть X — случайная величина, $\mathrm{E}X$ — её математическое ожидание.

Определение. ***Дисперсией*** случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины $(X - \mathrm{E}X)^2$. Дисперсию обозначают $\mathrm{D}X$.

Итак, по определению

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2. \qquad (1)$$

Из определения видно, что дисперсия не может быть отрицательной.

Иногда удобно использовать другую формулу:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2. \qquad (2)$$

Вывод формулы. Выполним тождественное преобразование:

$$(X - \mathrm{E}X)^2 = X^2 - 2X \cdot \mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2,$$

Теперь применим свойства математического ожидания:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X^2 - 2X \cdot \mathrm{E}X + (EX)^2 = \mathrm{E}X^2 - 2\mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}X + (\mathrm{E}X)^2 = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2.$$

Смысл дисперсии легко понять, если прочесть формулу (1) — математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания. Совсем просто — ***дисперсия есть средний квадрат отклонения***. Значит, дисперсия измеряет рассеивание значений случайной величины, подобно тому как дисперсия числового набора измеряет рассеивание чисел в этом наборе.

Дисперсия случайной величины является мерой рассеивания значений этой величины. Однако в некоторых случаях дисперсия неудобна. Например, если случайная величина — рост человека в сантиметрах, то дисперсия измеряется в квадратных сантиметрах. Удобная мера рассеивания должна выражаться в тех же единицах, что и сама величина. Отказываться от дисперсии тоже не хочется — она обладает рядом хороших свойств. Выход прост — в качестве меры рассеивания часто применяют корень квадратный из дисперсии: $\sqrt{\mathrm{D}X}$. Эту величину называют ***стандартным отклонением***.

Особую роль стандартное отклонение играет в измерениях. Как мы знаем, любое измерение подвержено ошибкам. Предположим, что мы провели некоторое измерение и получили приближённый результат x_0. Если нам известно стандартное отклонение $\sqrt{\mathrm{D}X}$, то часто можно с большой вероятностью утверждать, что истинное значение находится в интервале $(x_0 - 2\sqrt{\mathrm{D}X}; x_0 + 2\sqrt{\mathrm{D}X})$.

Во многих случаях истинное значение попадает в этот интервал с вероятностью, близкой к 0,95.

Пример 19. Вычислим дисперсию и стандартное отклонение числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение. Математическое ожидание этой случайной величины нам известно: $\mathrm{E}X = 3{,}5$. Вычислим математическое ожидание её квадрата. Составим распределение X^2:

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\mathrm{E}X^2 = (1+4+9+16+25+36)\frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Отсюда

$$\mathrm{D}X = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Тогда стандартное отклонение равно $\sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}708$.

Пример 20. Найдём дисперсию и стандартное отклонение случайной величины X, имеющей распределение Бернулли:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant p \leqslant 1$ (вероятность успеха), а $q = 1 - p$. Математическое ожидание: $\mathrm{E}X = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

В данном случае $X^2 = X$:

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

А значит, и математическое ожидание такое же: $\mathrm{E}X^2 = p$.

Поэтому

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq,$$

а стандартное отклонение равно $\sqrt{pq}$.

Упражнения

250. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; в) $X \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

251. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $X \sim \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; б) $X \sim \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

252. Случайная величина X имеет распределение Бернулли:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad \text{где } 0 \leqslant p \leqslant 1 \text{ и } q = 1 - p.$$

а) Постройте график зависимости дисперсии этой случайной величины от параметра: $y = f(p)$.

б) При каком значении p дисперсия принимает наибольшее значение?

253. Найдите дисперсию случайной величины X, которая с равными вероятностями принимает целые значения:

а) от 0 до 6; б) от 1 до 7.

254. Опираясь на результаты предыдущего задания, без вычислений найдите дисперсию случайной величины X, которая с равными вероятностями принимает целые значения от 2 до 8.

255. Случайные величины X и Y таковы, что их значения совпадают, а вероятности этих значений различны. Распределения X и Y:

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите и сравнение математические ожидания этих величин.

б) Укажите без вычислений, у какой из этих величин дисперсия больше. Объясните почему.

256. Случайные величины X и Y заданы распределениями:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

а) Укажите без вычислений, у какой из этих величин дисперсия больше. Объясните почему.

б) Найдите дисперсии обеих величин и проверьте правильность своего ответа в пункте а).

257. В случайном эксперименте игральную кость бросают дважды. Найдите дисперсию случайной величины:

а) сумма очков на двух костях; б) модуль разности очков на двух костях;

в) наибольшее число очков; г) наименьшее число очков.

258. Игральную кость бросают N раз. Найдите дисперсию суммы всех выпавших очков.

259. В оптовом магазине минеральная вода продаётся либо поштучно, либо упаковками по 2 или 16 бутылок. Предпочтения покупателей этой воды известны: вероятность покупки одной бутылки равна 0,74, упаковки из двух бутылок — 0,24, упаковки из 16 бутылок — 0,02. Найдите дисперсию величины «число бутылок в одной покупке».

260. На станке пилят доски толщиной 20 мм. Случайная величина «толщина доски» имеет математическое ожидание 20 мм и дисперсию 0,25. С вероятностью 0,95 отклонение толщины от математического ожидания не превосходит двух стандартных отклонений. Найдите вероятность того, что случайно выбранная доска имеет толщину более 21 мм или менее 19 мм.

9.4. Свойства дисперсии и стандартного отклонения

1°. Дисперсия постоянной величины равна 0:

$$\mathrm{D}a = \mathrm{E}(a - \mathrm{E}a)^2 = \mathrm{E}0 = 0.$$

Это весьма естественное свойство: дисперсия — это разброс, поэтому дисперсия постоянной величины должна быть равна нулю — ведь постоянная разброса не имеет.

2°. При сдвиге случайной величины на постоянную b дисперсия не меняется: $\mathrm{D}(X + b) = \mathrm{D}X$.

Доказательство. Воспользуемся формулой (2) (с. 92) и свойством $\mathrm{E}(aX) = a\mathrm{E}X$:

$$\mathrm{D}(X + b) = \mathrm{E}(X + b - \mathrm{E}(X + b))^2 = \mathrm{E}(X + b - \mathrm{E}X - b)^2 = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 = \mathrm{D}X. \quad \blacktriangleleft$$

3°. При умножении случайной величины на постоянную a дисперсия умножается на a^2: $\mathrm{D}(aX) = a^2\mathrm{D}X$.

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{D}(aX) = \mathrm{E}(aX - \mathrm{E}(aX))^2 = \mathrm{E}(a^2(X - \mathrm{E}X)^2) = a^2\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2 = a^2\mathrm{D}X. \quad \blacktriangleleft$$

Отсюда видно, как изменяется стандартное отклонение:

$$\sqrt{\mathrm{D}(aX)} = |a|\sqrt{\mathrm{D}X}.$$

Упражнения

261. Дана случайная величина X, и известна её дисперсия: $\mathrm{D}X = 8$. Найдите дисперсию случайной величины Y:

а) $Y = 2X$; б) $Y = X + 3$; в) $Y = 2X + 3$; г) $Y = \frac{1}{2}X - 1$.

262. Дана случайная величина X, и известна её дисперсия: $\mathrm{D}X = 3$. Найдите дисперсию случайной величины:

а) $Y = -5X$; б) $W = 12 - 0{,}5X$; в) $U = -2X - 4$; г) $Z = 3 - X$.

263. Рост человека, выраженный в сантиметрах,— случайная величина X. Для некоторой совокупности людей известно, что $\mathrm{E}X = 172$, $\mathrm{D}X = 36$. Найдите математическое ожидание и дисперсию роста этой же совокупности людей, если выразить рост:

а) в метрах; б) в дюймах (1 дюйм = 2,54 см).

264. Случайная величина X — масса шоколадки в граммах. При этом $\mathrm{E}X = 50$, $\mathrm{D}X = 1{,}2$ (для некоторой партии). Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y — массы шоколадки в унциях (1 унция = 31 г).

265. Измерение некоторого электронного термометра (в градусах Цельсия) — случайная величина с дисперсией 0,25. Найдите дисперсию и стандартное отклонение этого измерения, выраженного в градусах Фаренгейта ($1^\circ\mathrm{F} = 1{,}8^\circ\mathrm{C}$).

266. Система навигации определяет высоту полёта самолёта в футах. Ошибка имеет математическое ожидание 0 и дисперсию 10 000. Найдите дисперсию и стандартное отклонение ошибки определения высоты полёта, выраженной в метрах (1 фут = 0,305 м).

267. Спидометр автомобиля определяет скорость в километрах в час. Дисперсия показаний 4. Найдите дисперсию и стандартное отклонение показаний скорости, выраженной в милях в час (1 миля = 1609 м).

268. Про случайную величину X известно, что $\mathrm{E}X = 5$, $\mathrm{D}X = 6{,}25$. Найдите значения a и b такие, что случайная величина $Y = \dfrac{X - b}{a}$ имеет математическое ожидание 0 и дисперсию 1.

Глава V

Несколько случайных величин

Случайный эксперимент заканчивается случайным событием. Связывая с элементарным событием число, мы получаем случайную величину. С тем же самым исходом эксперимента мы можем связать другое число и в результате получить другую случайную величину.

Например, при двух бросаниях игральной кости можно говорить о случайных величинах X_1 и X_2, где X_1 — число очков, выпавшее при первом бросании, а X_2 — число очков, выпавшее при втором бросании.

В этом опыте можно рассматривать и другие случайные величины, например сумму очков или наибольшее выпавшее число. Все эти случайные величины мы наблюдаем одновременно, в одном случайном опыте. Обычно на практике приходится поступать именно так — рассматривать несколько случайных величин в одном опыте.

Пример 1. У человека есть рост, вес, возраст и т. д. Если этот человек выбран случайно из некоторой совокупности, то эти величины тоже случайны. Они появляются в нашем эксперименте одновременно, совместно.

Пример 2. При выполнении контрольной работы учащимися класса можно рассмотреть долю учащихся, получивших отличную отметку, отметку «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Каждая из этих долей есть случайная величина. Здесь случайным экспериментом является проведение контрольной работы.

§ 10. Совместные распределения

10.1. Таблица совместного распределения

Рассмотрим случайный эксперимент, в котором наблюдается одновременно несколько случайных величин. Для простоты ограничим обсуждение двумя случайными величинами X и Y. Каждая из них имеет свои наборы значений. Пусть случайная величина X принимает m значений $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а величина Y принимает n значений $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Предположим, что в результате случайного эксперимента величины X и Y приняли какие-то значения. Иными словами, происходит одно из возможных событий
$$(X = a_i, Y = b_j).$$
Индекс i принимает одно из значений $1, 2, \ldots, m$, индекс j — одно из значений $1, 2, \ldots, n$. Событие $(X = a_i, Y = b_j)$ случайное. Оно имеет вероятность $\mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j)$.

Какое-то из событий $(X = a_i, Y = b_j)$ в эксперименте непременно происходит, и никакие два одновременно произойти не могут, поэтому сумма всех вероятностей $\mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j)$, взятая по всем возможным парам i и j, равна 1.

Получается, что единичная вероятность распределяется между событиями $(X = a_i, Y = b_j)$. Так возникает ***совместное распределение вероятностей***. Его удобно записать в виде таблицы.

$X \backslash Y$	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1n}
a_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
a_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{in}
...	...	...	...	...	...	...
a_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mj}	...	p_{mn}

Примем для вероятностей короткие обозначения:
$$\mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij}.$$

В первом столбце указаны значения X, в первой строке — значения Y. В остальных ячейках таблицы записаны вероятности событий p_{ij}, то есть $\mathrm{P}(X = a_i, Y = b_j)$.

Пример 3. Бросим две игральные кости. Рассмотрим случайные величины X — наименьшее из выпавших очков и Y — наибольшее из выпавших очков. Найдём совместное распределение вероятностей для случайных величин X, Y и представим его в виде таблицы.

Сразу заметим, что $X \leqslant Y$. Поэтому все ячейки таблицы, где $X > Y$, содержат нулевые вероятности. Возможен случай, когда на обеих костях выпало одно и то же, например пара $(1;1)$. Тогда $X = Y = 1$. Вероятность такого события равна $\frac{1}{36}$. Предположим теперь, что выпали неравные числа, например, выпала одна из пар $(3;5)$ или $(5;3)$. Тогда $X = 3$ и $Y = 5$. Это событие имеет вероятность $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Заполним таблицу совместного распределения случайных величин X и Y:

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Убедитесь самостоятельно, что сумма всех вероятностей в таблице равна единице.

Упражнения

269. Монету бросают дважды. Случайная величина X — число орлов, выпавших при первом броске, а Y — число орлов, выпавших при втором броске.

а) Какие значения принимают случайные величины X и Y?

б) Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

270. Монету бросают дважды. Случайная величина X — число орлов, выпавших при первом броске, а Y — общее число выпавших орлов.

а) Какие значения принимают случайные величины X и Y?

б) Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

271. Монету бросают трижды. Случайная величина X — число орлов, выпавших при первом броске, а Y — число бросков до момента, когда одна из сторон выпадет во второй раз.

а) Какие значения принимают случайные величины X и Y?

б) Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

272. Дана таблица совместного распределения случайных величин X и Y. Найдите вероятность:

$X \backslash Y$	1	2
−1	0,3	0,1
0	0,1	
2	0,2	0,05

а) $\mathrm{P}(X=0,\, Y=2)$; б) $\mathrm{P}(X=-1)$;
в) $\mathrm{P}(Y=2)$; г) $\mathrm{P}(X>-1,\, Y=1)$.

273. Рассмотрим случайные величины «число единиц» и «число шестёрок» в опыте с двумя бросаниями игральной кости.

а) Какие значения принимают эти случайные величины?

б) Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин.

274. Монету бросают два раза. Случайная величина X — число выпавших орлов, Y — число выпавших решек. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин

275. Монету бросают три раза. Случайная величина X — число выпавших орлов, Y — число выпавших решек. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин

10.2. Выделение случайной величины из совместного распределения

В случайном эксперименте наблюдаются две совместно распределённые случайные величины. Вместе с тем каждая из них имеет своё собственное распределение. Как оно связано с совместным распределением двух величин?

Значения случайных величин X и Y известны и указаны в таблице. Чтобы получить распределение случайной величины X, нужно указать вероятности $\mathrm{P}(X=a_1)$, $\mathrm{P}(X=a_2)$, ..., $\mathrm{P}(X=a_m)$.

Событие $X=a_1$ является объединением попарно несовместных событий $(X=a_1,\, Y=b_1)$, $(X=a_1,\, Y=b_2)$ …, $(X=a_1,\, Y=b_n)$. Поэтому

$$\mathrm{P}(X=a_1)=p_{11}+p_{12}+\ldots+p_{1n}.$$

Это число — сумма вероятностей первой строки таблицы совместного распределения.

Аналогично находим вероятности $\mathrm{P}(X=a_2)$, $\mathrm{P}(X=a_3)$ и т. д. Полученные вероятности удобно записать дополнительным столбцом справа от таблицы совместного распределения.

Точно так же можно получить распределение случайной величины Y. Для этого нужно суммировать столбцы таблицы и записать полученное распределение в дополнительной строке.

Пример 4. Рассмотрим случайные величины X — наименьшее из выпавших очков и Y — наибольшее из выпавших очков в опыте с двумя бросаниями игральной кости. Таблица распределения уже построена (см. § 1). Просуммируем таблицу по строкам и столбцам. Суммы запишем в дополнительном столбце. Так получаются распределения случайных величин X и Y.

X \ Y	1	2	3	4	5	6	Распр. X
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Распр. Y	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

Полезно проверить, не допущены ли ошибки при вычислении вероятностей. Следует убедиться, что сумма вероятностей в полученном распределении случайной величины X равна единице. Точно так же проверьте, что сумма вероятностей в распределении Y равна единице.

Упражнения

276. Найдите распределения случайных величин X и Y из таблицы их совместного распределения:

а)

X \ Y	1	2	3
1	0,2	0,1	0,1
2	0	0,15	0,05
3	0,05	0	0,15
4	0	0,1	0,1

б)

X \ Y	1	3	5	7
−2	0,07	0,04	0,01	0,08
−1	0,05	0,03	0,08	0,08
1	0,08	0,08	0,09	0,02
2	0,08	0,04	0,09	0,08

в)

X \ Y	−1	−0,5	0,5	1
0,5	0,09	0,02	0,09	0,09
1,5	0,06	0,08	0,07	0,08
2,5	0,06	0,05	0,05	0,05
3,5	0,09	0,05	0,01	0,06

277. Найдите распределения случайных величин X и Y из таблицы их совместного распределения:

а)

$X \backslash Y$	-1	0	3
1	0,03	0,12	0,15
3	0,07	0,28	0,35

б)

$X \backslash Y$	0	2	4
-6	0,1	0,2	0,1
-3	0,3	0	0,3

в)

$X \backslash Y$	a	b
x_1	$\frac{1}{9}$	0
x_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

278. Бросают три игральные кости. Случайная величина X — число, выпавшее на первой кости, Y — число, выпавшее на второй кости. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин и найдите распределение каждой из них, если известно, что сумма очков на всех трёх костях равна 16.

279. Бросают три игральные кости. Случайная величина X — количество выпавших шестёрок, Y — число, выпавшее на первой кости. Составьте таблицу совместного распределения этих случайных величин и найдите распределение каждой из них, если известно, что сумма очков на всех трёх костях равна 16.

§ 11. Математическое ожидание и дисперсия суммы случайных величин

11.1. Математическое ожидание

Со случайными величинами, которые наблюдаются в одном случайном эксперименте, можно производить различные действия. Можно получать из них новые случайные величины. Например, новой случайной величиной будет сумма $X+Y$ или произведение XY.

Не всякое действие с физическими случайными величинами осмысленно. Например, если X обозначает возраст, а Y — зарплату человека, то можно формально умножить X на Y, но результат не имеет смысла.

В тех случаях, когда результат сложения или умножения имеет смысл, часто нужно знать математическое ожидание и дисперсию новой случайной величины. Рассмотрим подробно, как вычислить математическое ожидание суммы случайных величин, если известно их совместное распределение.

Совместное распределение двух случайных величин позволяет указать не только возможные значения их суммы, но и их вероятности.

Пример 5. Монету бросают дважды. Случайная величина X — число орлов при первом броске, случайная величина Y — число орлов при втором броске. Совместное распределение этих случайных величин даётся таблицей:

$X \backslash Y$	0	1
0	0,25	0,25
1	0,25	0,25

Случайная величина $X+Y$ может принимать значения 0, 1 и 2. Вероятности этих значений соответственно равны

$$\mathrm{P}(X+Y=0)=\mathrm{P}(X=0,Y=0)=0{,}25,$$

$$\mathrm{P}(X+Y=1)=\mathrm{P}(X=1,Y=0)+\mathrm{P}(X=0,Y=1)=0{,}5$$

и

$$\mathrm{P}(X+Y=2)=\mathrm{P}(X=1,Y=1)=0{,}25.$$

В результате мы получили уже известное нам распределение случайной величины «число орлов при двух бросаниях монеты»:

$$X+Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко найти математическое ожидание:

$$\mathrm{E}(X+Y)=0\cdot 0{,}25+1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}25=1.$$

Однако значение математического ожидания суммы двух случайных величин можно найти и без вычисления распределения суммы. Для этого достаточно знать математическое ожидание каждой из случайных величин X и Y и воспользоваться свойством

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}X+\mathrm{E}Y,$$

которое мы прежде сформулировали, но не доказали (гл. IV, § 9, п. 9.2). Докажем это утверждение теперь.

Теорема. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}X+\mathrm{E}Y.$$

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — значения случайной величины X, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — значения Y. Тогда значения $X+Y$ — это суммы вида a_k+b_j, которые получаются при наступлении события $X=a_k$, $Y=b_j$.

Тогда по определению $\mathrm{E}(X+Y)$ равно сумме всех произведений

$$(a_k+b_j)\mathrm{P}(X=a_k, Y=b_j).$$

Запишем это подробнее. Произведения $(a_k+b_j)\ \mathrm{P}(X=a_i, Y=b_j)$ будем записывать в определённом порядке, чтобы ни одно из них не пропустить и не учесть дважды. Чтобы формулы записывались короче, для вероятностей $\mathrm{P}(X=a_k, Y=b_j)$ используем обозначения p_{kj}.

Итак,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X+Y) = {} & (a_1+b_1)p_{11}+(a_1+b_2)p_{12}+\ldots+(a_1+b_n)p_{1n}+\\ & +(a_2+b_1)p_{21}+(a_2+b_2)p_{22}+\ldots+(a_2+b_n)p_{1n}+\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +(a_m+b_1)p_{m1}+(a_m+b_2)p_{m2}+\ldots+(a_m+b_n)p_{mn}.\end{aligned}$$

Следующий шаг — сгруппировать слагаемые в этой сумме. Раскроем скобки и соберём вместе все слагаемые, содержащие общий множитель a_1. Все эти слагаемые находятся в первой строке суммы:

$$a_1p_{11}+a_1p_{12}+\ldots+a_1p_{1n} = a_1(p_{11}+p_{12}+\ldots+p_{1n}) = a_1\mathrm{P}(X=a_1).$$

Все слагаемые, содержащие a_2, находятся во второй строке. Их сумма равна $a_2\mathrm{P}(X=a_2)$ и т. д.

В итоге сумма произведений, в которых встречается то или иное значение a_k, равна

$$a_1\mathrm{P}(X=a_1)+a_2\mathrm{P}(X=a_2)+a_3\mathrm{P}(X=a_3)+\ldots+a_m\mathrm{P}(X=a_m).$$

По определению это $\mathrm{E}X$.

Сходным образом рассмотрим произведения, в которых участвуют значения случайной величины Y. Все слагаемые, содержащие b_1, располагаются в первом столбце нашей суммы. Вот они:

$$b_1p_{11}+b_2p_{21}+\ldots+b_1p_{m1} = b_1(p_{11}+p_{21}+\ldots+p_{m1}) = b_1\mathrm{P}(Y=b_1).$$

Все слагаемые, содержащие множитель b_2, находятся во втором столбце и дают в сумме $b_2\mathrm{P}(Y=b_2)$ и т. д. В итоге сумма произведений, в которых встречается то или иное значение b_j, равна

$$b_1\mathrm{P}(Y=b_1)+b_2\mathrm{P}(Y=b_2)+\ldots+b_n\mathrm{P}(Y=b_n) = \mathrm{E}Y.$$

Мы ничего не пропустили в нашей таблице. Поэтому

$$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}X+\mathrm{E}Y.$$ ◄

Пример 6. Найдём математическое ожидание суммы случайных величин, заданных таблицей совместного распределения:

X \ Y	0	1	2
-1	0,1	0,2	0,3
1	0,1	0,2	0,1

Решение. Для вычисления $\mathrm{E}(X+Y)$ достаточно найти $\mathrm{E}X$ и $\mathrm{E}Y$. Составим распределения величин X и Y:

X \ Y	0	1	2	Распр. X
-1	0,1	0,2	0,3	0,6
1	0,1	0,2	0,1	0,4
Распр. Y	0,2	0,4	0,4	

Вычислим математические ожидания:

$$\mathrm{E}X = -1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = -0{,}2, \quad \mathrm{E}Y = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}4 = 1{,}2.$$

Тогда $\mathrm{E}(X+Y) = -0{,}2 + 1{,}2 = 1$.

Упражнение. Покажите, что $\mathrm{E}(X+Y+Z) = \mathrm{E}X + \mathrm{E}Y + \mathrm{E}Z$.

Упражнения

280. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y:

X \ Y	0	1	2
1	0,3	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,2

Найдите распределение случайной величины:
а) $X+Y$; б) $X-Y$; в) XY.

281. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y.

X \ Y	-1	0	2
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$

Найдите распределение случайной величины:

а) $X+Y$; б) $X-Y$; в) XY.

282. Найдите математическое ожидание суммы случайных величин X и Y, совместное распределение которых задано таблицей:

а)

X \ Y	0	1	2
-1	0,2	0,1	0,4
1	0,1	0	0,2

б)

X \ Y	-2	-1	1	2
0	0,16	0,12	0,08	0,04
1	0,04	0,08	0,08	0,04
3	0,12	0,04	0,12	0,08

в)

X \ Y	0	2	4	6
1	0,06	0,04	0,04	0,06
2	0,08	0,07	0,08	0,07
3	0,12	0,12	0,13	0,13

283. Бросили игральные кости. Найдите математическое ожидание суммы очков, выпавшей при бросании:

а) трёх; б) восьми; в) ста правильных игральных костей.

284. Монету бросили 10 раз. Найдите математическое ожидание числа выпавших орлов.

285. Игральную кость бросили n раз. Найдите математическое ожидание:

а) числа выпавших шестёрок;

б) числа выпавших троек;

в) суммы выпавших очков.

286. Горожане составляют 75% общей численности населения региона, остальные — сельские жители. В ходе социологического обследования опрошено

1014 случайно выбранных жителей региона. Найдите математическое ожидание случайной величины:

а) число опрошенных горожан; б) число опрошенных сельских жителей.

287. В некотором регионе математическое ожидание балла ЕГЭ по русскому языку равно 45, а математическое ожидание балла по математике в этом же регионе равно 34. Общий балл равен сумме баллов по математике и по русскому языку. Найдите математическое ожидание общего балла в этом регионе.

11.2. Ковариация и дисперсия суммы случайных величин

Важной характеристикой изменчивости является дисперсия. Теперь встал вопрос о дисперсии суммы случайных величин. Мы вычислим дисперсию суммы двух случайных слагаемых. Пусть X и Y — две случайные величины, наблюдаемые в одном случайном эксперименте и такие, что их сумма $X+Y$ имеет смысл. Вычислим $\mathrm{D}(X+Y)$. По определению дисперсии

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{E}((X+Y)-\mathrm{E}(X+Y))^2.$$

Воспользуемся тем, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X+Y) &= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}X)+(Y-\mathrm{E}Y))^2 = \\ &= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}X)^2+2(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)+(Y-\mathrm{E}Y)^2) = \\ &= \mathrm{E}(X-\mathrm{E}X)^2+2\mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\big)+\mathrm{E}(Y-\mathrm{E}Y)^2.\end{aligned}$$

Два слагаемых в этом выражении нам знакомы: это $\mathrm{D}X$ и $\mathrm{D}Y$. Ранее не встречавшееся выражение $\mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\big)$ называется ковариацией случайных величин X и Y. Его обозначение $\operatorname{cov}(X,Y)$.

Определение 1. ***Ковариацией*** случайных величин X и Y называют число

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)\big).$$

Заметим, что ковариация не зависит от порядка, в котором взяты случайные величины:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X).$$

Это видно из определения. К обсуждению ковариации мы вернёмся в следующей главе.

Итак, для дисперсии $X+Y$ получено равенство

$$\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X+\mathrm{D}Y+2\operatorname{cov}(X,Y).$$

Свойства ковариации

1°. Для ковариации справедлива формула

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y.$$

2°. Для любых случайных величин X и Y и любого числа a верно равенство

$$\operatorname{cov}(X,aY) = \operatorname{cov}(aX,Y) = a\operatorname{cov}(X,Y).$$

3°. Для любых трёх случайных величин X, Y и Z верно равенство

$$\operatorname{cov}(X,Y+Z) = \operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{cov}(X,Z).$$

Доказательство свойства 1. Воспользуемся свойствами математического ожидания:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}((X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)) = \mathrm{E}(XY - Y\cdot\mathrm{E}X - X\cdot\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y) =$$
$$= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}Y\cdot\mathrm{E}X - \mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y + \mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y. \quad ◄$$

Свойства 2° и 3° докажите самостоятельно (см. упражнение 288).

Пример 7. Найдём ковариацию и дисперсию суммы двух случайных величин X и Y, заданных таблицей совместного распределения:

X \ Y	0	1	2
−1	0,1	0,2	0,3
1	0,1	0,2	0,1

Решение. Найдём математические ожидание произведения величин:

$$\mathrm{E}(XY) = 0\cdot 0{,}1 + (-1)\cdot 0{,}2 + (-2)\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}1 = -0{,}5.$$

При составлении этой суммы мы каждую вероятность из таблицы умножали на произведение соответствующих значений X и Y. Например, вероятность события $(X=1,\ Y=2)$ равна 0,1 (правый нижний угол таблицы). Отсюда в сумме появляется последнее слагаемое $2\cdot 0{,}1$.

Составим распределения X и Y:

X \ Y	0	1	2	Распр. X
−1	0,1	0,2	0,3	0,6
1	0,1	0,2	0,1	0,4
Распр. Y	0,2	0,4	0,4	

Найдём ожидания самих величин и их квадратов:

$$\mathrm{E}X = -1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = -0{,}2; \qquad \mathrm{E}Y = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}4 = 1{,}2;$$

$$\mathrm{E}X^2 = 1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}4 = 1; \qquad \mathrm{E}Y^2 = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}4 = 2.$$

Найдём дисперсии и ковариацию:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = 1 - (-0{,}2)^2 = 0{,}96;$$

$$\mathrm{D}Y = \mathrm{E}Y^2 - (\mathrm{E}Y)^2 = 2 - (1{,}2)^2 = 0{,}56;$$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y = -0{,}5 - (-0{,}2) \cdot 1{,}2 = -0{,}26.$$

Следовательно, дисперсия суммы равна

$$\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + 2\,\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{D}Y = 0{,}96 - 2 \cdot 0{,}26 + 0{,}56 = 1.$$

Упражнения

288. Докажите свойства 2° и 3° ковариации.

289. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,1	0,2	0,1
2	0,2	0,3	0,1

Найдите: а) распределение случайной величины $X + Y$;
б) распределение случайной величины $X \cdot Y$;
в) ковариацию $\mathrm{cov}(X, Y)$.

290. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0,1	0,1	0,3
1	0,2	0,2	0,1

Найдите: а) дисперсию величины X; б) дисперсию величины Y;
в) дисперсию суммы $X + Y$.

291. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	1	2
1	0,3	0
2	0	0,7

Найдите: а) $\mathrm{E}(X + Y)$; б) $\mathrm{cov}(X, Y)$; в) $\mathrm{D}(X + Y)$.

292. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y. Найдите ковариацию этих величин.

а)

$X \backslash Y$	0	1	2
−1	0,2	0,1	0,3
1	0,1	0,2	0,1

б)

$X \backslash Y$	−2	−1	1	2
0	0,12	0,11	0,03	0,05
1	0,05	0,03	0,11	0,04
3	0,17	0,03	0,15	0,11

в)

$X \backslash Y$	0	2	4	6
1	0,03	0,04	0,05	0,06
2	0,07	0,13	0,06	0,07
3	0,15	0,08	0,14	0,12

293. Ковариация случайных величин X и Y равна 4. Найдите ковариацию случайных величин:

а) X и $Z = 2 + 3Y$; б) X и $Z = 2Y - 5$; в) Y и $Z = -3X - 4$; г) $Z = 2X - 1$ и $T = 5 - 3Y$.

294. Ковариация случайных величин X и Y равна 2, а дисперсия величины X равна 3. Найдите ковариацию случайных величин:

а) X и $Z = 2 + 3X$; б) X и $Z = 2X - Y$; в) $Z = 2X - 1$ и $T = 2X - 3Y + 2$.

Глава VI

Независимые случайные величины

§ 12. Независимость случайных величин

12.1. Определение независимых случайных величин

Независимость случайных величин так же важна, как и независимость событий. Эти два понятия тесно связаны.

Говоря описательно, случайные величины X и Y независимы, если независимы любые два события, которые по отдельности можно выразить через величины X и Y.

Напомним, что события A и B называются независимыми, если

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Пусть, как и прежде, случайная величина X принимает значения $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а случайная величина Y принимает значения $b_1, b_2, \ldots, b_n$ с некоторыми вероятностями.

Тогда можно рассмотреть события $X = a_k$ и $Y = b_j$. В дальнейшем для краткости вместо $\mathrm{P}\big((X = a) \cap (Y = b)\big)$ будем писать $\mathrm{P}(X = a,\ Y = b)$, по-прежнему подразумевая под этим вероятность пересечения событий.

Определение. Случайные величины X и Y называются ***независимыми***, если события $X = a_k$ и $Y = b_j$ независимы для любых возможных значений a_k и b_j, то есть выполняется равенство

$$\mathrm{P}(X = a_k,\ Y = b_j) = \mathrm{P}(X = a_k) \cdot \mathrm{P}(Y = b_j).$$

Если это равенство не выполняется ***хотя бы для какой-нибудь пары значений***, то величины X и Y не являются независимыми. Тогда их называют взаимно зависимыми[1].

[1] Иногда определение независимости случайных величин дают иначе, в более общем виде, пригодном не только для дискретных случайных величин.

Определение 2. Случайные величины X и Y называются независимыми, если независимы два любых события A и B, выражающиеся соответственно только через случайные величины X и Y. Можно показать, что определения 1 и 2 эквивалентны, то есть приводят к одинаковому пониманию независимости случайных величин.

Пример 1. Рассмотрим опыт, состоящий в двукратном бросании игральной кости. Пусть X — число очков, выпадающее на первой кости, Y — число очков на второй кости.

Совместное распределение вероятностей дано таблицей:

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Докажем, что случайные величины X и Y независимы.

Доказательство. Проверим, выполняется ли определение. Возьмем события $A = (X = a)$ и $B = (Y = b)$. Здесь a и b принимают любые целые значения от 1 до 6.

Эти события независимы, поскольку

$$\mathrm{P}(A \cap B) = P(X = a, Y = b) = \frac{1}{36}$$

и

$$\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Это верно для любых возможных a и b, следовательно, случайные величины X и Y независимы. ◀

Этот пример показывает, как по совместному распределению двух случайных величин узнать, являются ли они независимыми или нет. Если определение независимости выполняется для каждой пары значений случайных величин, то эти величины независимы.

Упражнения

295. Монету бросают дважды. Случайная величина X — число выпавших орлов, Y — число выпавших решек.

а) Составьте таблицу совместного распределения двух случайных величин.

б) Проверьте независимость этих случайных величин.

в) Составьте распределение случайной величины $X+Y$. Как вы думаете, почему величины X и Y взаимно зависимы?

296. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y. Проверьте, независимы ли эти величины.

а)

X \ Y	2	3
−1	0,2	0,2
1	0,3	0,3

б)

X \ Y	0	1
−2	0,06	0,24
−1	0,14	0,56

в)

X \ Y	−1	0	1
0	0,1	0,2	0,1
2	0,18	0,32	0,1

г)

X \ Y	−1	0	1
0	0,12	0,2	0,08
2	0,18	0,3	0,12

297. Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X — число выпавших шестёрок, Y — число очков на второй кости. Являются ли эти случайные величины независимыми?

12.2. Математическое ожидание произведения случайных величин

Математическое ожидание независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий. Иными словами, верна следующая теорема.

Теорема. Если случайные величины X и Y независимы, то

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y.$$

Докажем теорему для простого частного случая, когда обе величины принимают всего лишь по два возможных значения. Однако этого достаточно для того, чтобы понять, как проводится доказательство в общем случае.

Пусть случайная величина X имеет распределение $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, а случайная величина Y имеет распределение $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$.

Запишем произведение математических ожиданий этих величин и раскроем скобки:

$$\mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y = (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = x_1y_1p_1q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_2y_1p_2q_1 + x_2y_2p_2q_2.$$

Рассмотрим первое слагаемое подробнее. Поскольку случайные величины X и Y независимы,

$$p_1q_1 = \mathrm{P}(X = x_1) \cdot \mathrm{P}(Y = y_1) = \mathrm{P}(X = x_1, Y = y_1).$$

Сделав такие же преобразования во всех прочих слагаемых, получим

$$\mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y = x_1y_1\mathrm{P}(X = x_1, Y = y_1) + x_1y_2\mathrm{P}(X = x_1, Y = y_2) + \\ + x_2y_1\mathrm{P}(X = x_2, Y = y_1) + x_2y_2\mathrm{P}(X = x_2, Y = y_2) = \mathrm{E}(XY).$$

Итак, $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$.

Конечно, сделанную выкладку нельзя считать строгим доказательством теоремы. Однако сколько бы значений ни имели случайные величины X и Y, рассуждения при доказательстве такие же, как в этом частном случае.

12.3. Ковариация независимых случайных величин

Следствие 1. Ковариация независимых случайных величин равна нулю.

Более точно: если в одном случайном эксперименте наблюдаются независимые случайные величины X и Y, то $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой для ковариации

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$$

(см. гл. V, § 11). Поскольку для независимых случайных величин $\mathrm{E}XY = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$, получаем

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y - \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y = 0.$$ ◀

12.4. Дисперсия суммы независимых случайных величин

Следствие 2. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Более точно: если в одном случайном эксперименте наблюдаются независимые случайные величины X и Y, то $\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$.

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + 2\,\mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{D}Y.$$

Учитывая, что для независимых величин $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, получаем

$$\mathrm{D}(X + Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y.$$ ◀

Это свойство дисперсии очень важное и удобное. Оно объясняет, почему дисперсия занимает особое место среди всевозможных мер рассеивания.

12.5. Коэффициент корреляции

Обращение в нуль ковариации пары случайных величин является необходимым условием их независимости, то есть если две случайные величины независимы, то их ковариация равна нулю.

Другими словами, если ковариация пары случайных величин отлична от нуля, то такие две случайные величины не являются независимыми. Для таких случайных величин нужно иметь числовую меру их взаимной зависимости.

Случайные величины можно выражать в разных единицах измерения. Например, расстояния можно измерять в километрах или в милях. При переходе от одних единиц измерения к другим связь между двумя величинами не меняется, а ковариация меняется. Поэтому измерять связь двух величин их ковариацией неудобно. Используют другую числовую меру связи, называемую ***коэффициентом корреляции***. Он получается из ковариации двух величин делением на их стандартные отклонения. В результате пропадает зависимость от единиц измерения.

Определение. ***Коэффициентом корреляции*** двух случайных величин X и Y называют число[1]

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{D}X \cdot \mathrm{D}Y}}.$$

Коэффициент ρ равен нулю, только если $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Как мы видели, для этого достаточно, чтобы случайные величины X и Y были независимы. Обратное, вообще говоря, неверно — ковариация и коэффициент корреляции могут быть нулевыми и для взаимно зависимых случайных переменных (см. пример 2 на с. 116).

12.6. Свойства коэффициента корреляции

Сформулируем и докажем некоторые свойства коэффициента корреляции ρ.

1°. Для любых случайных величин X и Y выполняется неравенство

$$|\rho(X, Y)| \leqslant 1.$$

Доказательство. Рассмотрим две непостоянные случайные величины X и Y. Пусть $Z = X + bY$. Найдём дисперсию случайной величины Z:

$$\mathrm{D}Z = \mathrm{D}(X + bY) = \mathrm{D}X + 2\operatorname{cov}(X, bY) + \mathrm{D}(bY) = \mathrm{D}X + 2b\operatorname{cov}(X, Y) + b^2\mathrm{D}Y.$$

---

[1] Как видно из определения, коэффициент корреляции существует только для величин, имеющих ненулевые дисперсии.

В правой части равенства находится квадратный трёхчлен от b, который неотрицателен при всех значениях b, поскольку равен дисперсии случайной величины Z. Следовательно, дискриминант этого трёхчлена меньше либо равен нулю:

$$4\operatorname{cov}^2(X, Y) - 4\mathrm{D}X \cdot \mathrm{D}Y \leqslant 0,$$

откуда $\dfrac{\operatorname{cov}^2(X, Y)}{\mathrm{D}X \cdot \mathrm{D}Y} \leqslant 1$. Извлечём корень из обеих частей неравенства:

$$|\rho| \leqslant 1.$$ ◀

2°. Равенство $|\rho(X, Y)| = 1$ достигается, только если между случайными величинами есть линейная связь, то есть если

$$X + bY = c$$

для некоторых постоянных чисел b и c.

Доказательство. Имеем $|\rho| = 1$ тогда и только тогда, когда дискриминант трёхчлена

$$\mathrm{D}Z = \mathrm{D}X + 2b\operatorname{cov}(X, Y) + b^2\mathrm{D}Y$$

равен нулю. Это равносильно условию, что при $b = -\dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\mathrm{D}Y}$ значение трёхчлена равно нулю: $\mathrm{D}Z = 0$, то есть Z — некоторая постоянная величина c. Таким образом, $|\rho| = 1$ тогда и только тогда, когда $X + bY = c$. ◀

Мы искали меру связи, которая сохраняется при замене единиц измерения случайных величин. При линейном преобразовании одной случайной величины (а значит, и обеих) коэффициент корреляции не меняется по модулю. Сформулируем эту мысль точно в виде свойства.

3°. Пусть X и Y — две непостоянные случайные величины, и пусть $Z = aY + b$, где $a \neq 0$. Тогда $|\rho(X, Z)| = |\rho(X, Y)|$.

Доказательство. Имеем

$$\rho(X, Z) = \rho(X, aY + b) = \frac{\operatorname{cov}(X, aY + b)}{\sqrt{\mathrm{D}X} \cdot \sqrt{\mathrm{D}(aY + b)}} = \frac{a\operatorname{cov}(X, Y)}{|a|\sqrt{\mathrm{D}X} \cdot \sqrt{\mathrm{D}Y}} = \pm\rho(X, Y).$$

Знак совпадает со знаком коэффициента a. Свойство 3 доказано. ◀

Пример 2. Выберем случайное натуральное число от 1 до 5. Рассмотрим две случайные величины: X — выбранное число, Y — остаток от деления X на 2.

а) Выясним являются ли величины X и Y независимыми.

б) Найдём ковариацию и коэффициент корреляции величин X и Y.

Решение. а) Составим совместное распределение обеих величин и распределение каждой величины в общей таблице:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	Распр. Y
0	0	0,2	0	0,2	0	0,4
1	0,2	0	0,2	0	0,2	0,6
Распр. X	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	

Рассмотрим, например, событие $(X=0,\ Y=3)$. Из таблицы видно, что

$$\mathrm{P}(X=0, Y=3)=0, \quad \mathrm{P}(X=0)=0{,}4 \quad \text{и} \quad \mathrm{P}(Y=3)=0{,}2.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(X=0, Y=3) \neq \mathrm{P}(X=0)\cdot\mathrm{P}(Y=3).$$

Величины X и Y не являются независимыми.

б) Напишем распределение величины XY. Эта величина принимает значения 1, 3 или 5, а также 0. Получаем

$$XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найдём математические ожидания: $\mathrm{E}(XY) = 0{,}2\cdot(1+3+5)=1{,}8$, $\mathrm{E}Y=0{,}6$ и $\mathrm{E}X=3$. Тогда

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}X\cdot\mathrm{E}Y=1{,}8-3\cdot 0{,}6=0.$$

Ковариация равна нулю. Значит, коэффициент корреляции также равен нулю.

В этом упражнении рассмотрен пример двух зависимых величин с нулевым коэффициентом корреляции. Этот пример показывает, что нулевой коэффициент корреляции двух случайных величин не обязательно означает их независимость.

Упражнения

298. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,05	0,3	0,15
2	0,1	0,35	0,05

Найдите:

а) $E(XY)$; б) $\operatorname{cov}(X, Y)$; в) DX и DY;

г) коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

299. Дано совместное распределение двух случайных величин X и Y:

$X \backslash Y$	-1	1	3
0	0,2	0,12	0,08
1	0,3	0,18	0,12

Найдите:

а) $E(XY)$; б) $\operatorname{cov}(X, Y)$; в) DX и DY;

г) коэффициент корреляции случайных величин X и Y.

300. Симметричную монету бросают дважды. Найдите коэффициент корреляции случайных величин X и Y, где X — число выпавших орлов и Y — число выпавших решек.

301. Две случайные величины X и Y независимы. Верно ли, что их ковариация равна нулю?

302. Ковариация случайных величин X и Y равна нулю. Верно ли, что они независимы?

303. Бросают две игральные кости. Чему равны ковариация и коэффициент корреляции случайных величин «число очков, выпавших на первой кости» и «число очков, выпавших на второй кости»?

304. Бросают две игральные кости. Чему равны ковариация и коэффициент корреляции случайных величин «число очков, выпавших на первой кости» и «сумма очков на обеих костях»?

305. Бросают две игральные кости. Найдите ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин «число очков, выпавших на первой кости» и «число очков, выпавших на второй кости», если известно, что

а) сумма выпавших очков равна 7;

б) сумма выпавших очков равна 8;

в) на второй кости выпало на 2 очка больше, чем на первой.

Глава VII

Геометрическое распределение

§ 13. Число испытаний до первого успеха

К геометрическому распределению приводит задача, связанная с испытаниями Бернулли. Рассмотрим испытания Бернулли с вероятностью успеха p и с вероятностью неудачи $q = 1 - p$.

Предположим, что мы проводим испытания до появления первого успеха. После появления успеха испытания не продолжаем. Пусть случайная величина X — число проведённых испытаний. Надо найти распределение случайной величины X.

Очевидно, что возможные значения X — натуральные числа. Событие $X = k$ означает, что сначала оказалось $k - 1$ неудач, а в испытании с номером k наступил успех:

$$\{X = k\} = \underbrace{\text{ННН...НН}}_{k-1\ \text{раз}}\text{У}.$$

Испытания Бернулли независимы, поэтому

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, получается геометрическое распределение:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & k & \ldots \\ p & qp & q^2p & q^3p & \ldots & q^{k-1}p & \ldots \end{pmatrix}.$$

Проверим, что сумма всех вероятностей в распределении равна единице. Для этого нам потребуется формула суммы бесконечной геометрической прогрессии. Первый член прогрессии равен p, а знаменатель равен q. Получаем

$$p + qp + q^2p + q^3p + \ldots = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Пример 1. Мы хотим отправить СМС — короткое сообщение с помощью мобильного телефона. Наш телефон отправляет СМС ближайшей станции сотовой связи. Станция подтверждает, что сообщение

Название происходит от связи этого распределения с геометрической прогрессией.

пришло без искажений (успех). Если искажения есть (неудача), телефон делает следующую попытку и т. д.

Предположим, что мы находимся далеко от станции в зоне неуверенного приёма. Тогда вероятность передачи без искажений мала. Поэтому телефон может сделать много попыток, прежде чем удастся отправить СМС. Предположим для определённости, что вероятность отправить СМС без искажений равна $p = 0{,}05$.

Найдём вероятность того, что СМС будет отправлена менее чем за 100 попыток. Снова на помощь приходит суммирование геометрической прогрессии:

$$\mathrm{P}(X \leqslant 100) = p + qp + q^2p + \ldots + q^{99}p =$$

$$= p \cdot \frac{1-q^{100}}{1-q} = 1 - q^{100} = 1 - 0{,}95^{100} \approx 0{,}994.$$

Как видим, сообщение, скорее всего, будет передано, даже несмотря на плохую связь.

Попытки следуют быстро одна за другой, мы даже не знаем, сколько попыток сделал наш телефон. Иногда, отправляя СМС из леса, можно заметить, что отправка происходит намного дольше, чем обычно, — телефон несколько секунд показывает, что сообщение всё ещё не ушло[1].

13.1. Периодический контроль и время безотказной работы

Предположим, что мы периодически через равные промежутки времени проверяем исправность механизма или прибора.

Обычно с течением времени механизм стареет и вероятность отказа увеличивается. Мы рассмотрим только такие случаи, когда старением можно пренебречь. Мы принимаем основное условие: ***при каждом испытании вероятность неисправности p одна и та же***, то есть старение отсутствует или, по крайней мере, почти не сказывается.

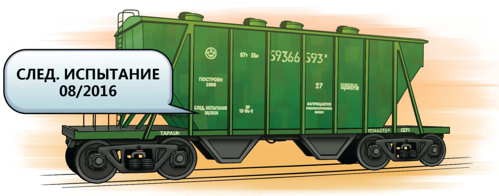
В этих условиях срок безотказной работы механизма можно определить как число испытаний до обнаружения неисправности. Обозначим эту случайную величину T. Очевидно, она распределена по геометрическому закону.

Пример 2. Срок между двумя техническими осмотрами и обслуживаниями самолёта Ту-204 — 600 лётных часов. Пока возраст самолёта не слишком велик, можно считать, что вероятность обнаружения серьёзных неисправностей во время техобслуживания примерно одна

[1] На самом деле в телефонах предусмотрена защита от «зависания». Если какое-то определённое число попыток безуспешно, телефон прекращает передачу и сообщает о том, что сообщение не отправлено.

и та же. Таким образом, срок службы самолёта до первого серьёзного ремонта — случайная величина, распределённая по геометрическому закону.

Похожим образом — по регламенту — проверяют надёжность автомобилей, лифтов, тормозных систем железнодорожных вагонов и других систем, где отказ чреват человеческими жертвами.



13.2. Математическое ожидание геометрического распределения

Теорема. Пусть случайная величина X распределена по геометрическому закону:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & \dots \\ p & qp & q^2p & q^3p & \dots & q^{k-1}p & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{E}X = \dfrac{1}{p}$.

Доказательство. Обозначим математическое ожидание a. Тогда

$$a = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \dots$$

Запишем $2qp$ как $qp + qp$. Запишем $3q^2p$ как $q^2p + 2q^2p$ и т. д. Получим

$$a = (p + qp + q^2p + q^3p + \dots) + (qp + 2q^2p + 3q^3p + \dots).$$

Сумма в первой скобке равна $p\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1$.

Сумма во второй скобке равна $q(p + 2qp + 3q^2p + \dots) = qa$.

Получаем уравнение

$$a = 1 + qa,$$

откуда $a(1-q) = 1$ и, значит, $a = \dfrac{1}{p}$. ◀

Пример 3. Бросая одним броском две кости сразу, можно выбросить две шестёрки. Вероятность этого равна $\frac{1}{36}$. Найдём среднее число бросков, нужных, чтобы выбросить две шестёрки.

Решение. Случайная величина X, равная числу бросков, подчиняется геометрическому распределению с вероятностью успеха $p=\frac{1}{36}$. Значит, математическое ожидание равно $\mathrm{E}X=\frac{1}{p}=36$. В среднем пара шестёрок появляется через 36 бросков.

Ответ: 36.

Пример 4. Известно, что средний срок службы некоторого нового самолёта до капитального ремонта составляет 6000 лётных часов. Техобслуживание самолёта этого типа проводится каждые 600 часов. Найдём вероятность того, что при очередном техобслуживании обнаружится необходимость капитального ремонта.

Решение. В среднем самолёт до ремонта проходит $6000:600=10$ техобслуживаний. Считая, что случайная величина «число техобслуживаний» имеет геометрическое распределение с математическим ожиданием $\mathrm{E}X=10$, получаем, что искомая вероятность равна $p=\frac{1}{\mathrm{E}X}=0{,}1$.

13.3. Дисперсия геометрического распределения

Теорема. Пусть случайная величина X распределена по геометрическому закону:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & k & \ldots \\ p & qp & q^2p & q^3p & \ldots & q^{k-1}p & \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{D}X=\frac{q}{p^2}$.

Доказательство. Найдём распределение случайной величины X^2:

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & \ldots & k^2 & \ldots \\ p & qp & q^2p & q^3p & \ldots & q^{k-1}p & \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathrm{E}X^2 = p+4qp+9q^2p+16q^3p+\ldots$$

Запишем $4qp$ как $qp+3qp$. Запишем $9q^2p$ как $4q^2p+5q^2p$ и т. д. Получим

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X^2 &= (qp+4q^2p+9q^3p+\ldots)+(p+3qp+5q^2p+7q^3p+\ldots) = \\ &= q(p+4qp+9q^2p+\ldots)+\mathrm{E}(2X-1) = q\mathrm{E}X^2+2\mathrm{E}X-1. \end{aligned}$$

Учтём, что $\mathrm{E}X = \dfrac{1}{p}$, и получим

$$\mathrm{E}X^2 = q\mathrm{E}X^2 + \frac{2}{p} - 1,$$

откуда $\mathrm{E}X^2 = \dfrac{2-p}{p^2}$. Тогда

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$ ◄

Упражнения

306. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & k & \dots \\ 0{,}8 & 0{,}16 & 0{,}032 & 0{,}0064 & \dots & 0{,}8 \cdot 0{,}2^{k-1} & \dots \end{pmatrix}.$$

а) Найдите $\mathrm{E}X$. б) Найдите $\mathrm{D}X$.

307. Последовательно бросают симметричную монету. Рассмотрим случайную величину X — число бросков до первого выпадения орла.

а) Выпишите распределение случайной величины X.

б) Найдите математическое ожидание случайной величины X.

в) Найдите дисперсию случайной величины X.

308. Последовательно бросают правильную игральную кость. Рассмотрим случайную величину X — число бросков до первого выпадения шестёрки.

а) Выпишите распределение случайной величины X.

б) Найдите математическое ожидание случайной величины X.

в) Найдите дисперсию случайной величины X.

309. Вероятность попадания в мишень равна 0,7. Предположим, что она не меняется от выстрела к выстрелу. Найдите математическое ожидане числа выстрелов, произведённых до первого промаха.

310. Страховая компания оценивает вероятность попадания легкового автомобиля, застрахованного частным лицом, в ДТП в течение года. Оценка этой вероятности получается равна 0,12. Пользуясь этой оценкой, оцените число лет до первого ДТП с участием только что застрахованного автомобиля.

Глава VIII

Комбинаторика

§ 14. Основные сведения

Комбинаторика изучает способы перебора, пересчёта и упорядочивания предметов. Другая задача — подсчёт комбинаций предметов. Типичный вопрос в комбинаторной задаче: «Сколько способов?» Например, сколько существует способов упорядочить выступления спортсменов на соревнованиях? Сколько различных кодов в автоматической камере хранения? Сколько различных паролей из шести знаков?

В теории вероятностей комбинаторика играет важную роль, помогая пересчитывать количество событий.

14.1. Правило умножения

Главное правило комбинаторики — правило умножения. Это правило позволяет находить число ***упорядоченных пар***. Если на первом месте может быть один из m разных предметов, а на втором может быть один из k разных предметов, то можно составить ровно $m \cdot k$ различных упорядоченных пар.

Пример 1. Место в салоне самолёта указывают числом и буквой. Число означает ряд от 1 до 12, а латинская буква от A до D означает положение кресла (см. рис. 30). Сколько всего мест в салоне такого самолёта?

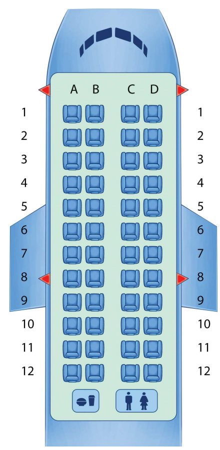


Рис. 30. План салона самолёта

Решение. Каждое место обозначается парой из числа и буквы, например 4A или 10C. На первом месте может быть одно из 12 чисел, на втором месте — одна из 4 букв.

Значит, общее число мест равно $12 \cdot 4 = 48$.

Комбинаторное правило работает и тогда, когда составляются упорядоченные тройки, четвёрки или наборы произвольной длины (***кортежи***).

Пример 2. Автомобильная парковка имеет 5 этажей, на каждом этаже 4 линии, в каждой линии 27 мест для автомобилей. Как обозначить места для автомобилей?

Рис. 31. Многоярусная автомобильная парковка

Можно просто пронумеровать места. Но тогда трудно найти место с большим номером, например № 143. Это неудобно.

Поиск станет легче, если в обозначении места указаны этаж и линия, например (4, Б, 05). Скобки и запятые можно не писать. Получаются упорядоченные тройки, например 4Б05.

Пример 3. Сколько существует трёхзначных чисел, кратных 5?

Решение. Трёхзначное число записывается упорядоченной тройкой цифр. Первая цифра — не 0. Число делится на 5, если последняя цифра 0 или 5. Значит, на первом месте должна стоять одна из 9 цифр, на втором — любая из 10 цифр, а на третьем — одна из двух цифр 0 или 5.

С помощью правила умножения получаем $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$.

У этой задачи есть вероятностное приложение. Теперь можно сразу ответить на вопрос, какова вероятность того, что случайное трёхзначное число кратно 5.

Упражнения

311. В примере 2 пятиэтажная парковка имеет 4 линии на каждом этаже и 27 мест для стоянки в каждой линии. Найдите общее число стояночных мест на этой парковке.

312. В регистрационном номере автомобиля 3 буквы, 3 цифры и номер региона. Цифры любые, а букв только 12 (те, что совпадают начертанием с какой-нибудь латинской буквой). Сколько может существовать различных автомобильных номеров (без учёта номера региона)?

313. Сколько существует двузначных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

а) цифры не повторяются; б) чётных;

в) вторая цифра больше 3; г)* вторая цифра больше первой?

314. Сколько существует трёхзначных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

а) число десятков нечётно; б) цифры не повторяются;

в) чётных; г) третья цифра совпадает с первой;

д)* третья цифра больше первой; е)* третья цифра меньше первой;

ж)* все цифры идут в порядке возрастания?

14.2. Отождествление

Неупорядоченные наборы

До сих пор мы обсуждали упорядоченные наборы. Нам было важно, в каком порядке следовали элементы. Например, мы обсуждали трёхзначные числа, кратные 5. Числа 235 и 325 — разные числа, поэтому здесь порядок важен.

Иногда нужно пересчитать сложные объекты, в которых порядок следования элементов не важен. В этом случае тоже можно пользоваться правилом умножения, но затем наборы, которые отличаются только порядком элементов, нужно ***отождествить***, то есть считать одним набором.

Пример 4. Имеется четыре точки A, B, C, D. Сколько существует отрезков, соединяющих какие-нибудь две из этих точек?

Решение. Поступим как прежде, пересчитав упорядоченные пары букв. Их всего $4 \cdot 3 = 12$. Однако каждые две пары букв, отличающиеся только порядком, скажем AB и BA, означают один и тот же отрезок. Следовательно, их нужно отождествить — считать, что они относятся к одному и тому же отрезку. Таким образом, отрезков будет вдвое меньше: $\frac{12}{2} = 6$.

Упражнение. Имеется пять точек A, B, C, D, E, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Раскраски карусели (отождествление поворотов)

В некоторых задачах отождествление производится иначе. Иногда элементы набора расположены «по кругу» — таким образом, приходится отождествлять повороты.

Пример 5. На карусели семь одинаковых лошадок. Их нужно покрасить в семь разных цветов. Сколько существует различных способов покрасить карусель?

Решение. В этом случае следует считать одинаковыми, то есть отождествить, раскраски, которые получаются друг из друга поворотом карусели.

Занумеруем лошадок по кругу, взяв в качестве первой какую-нибудь одну. Первую лошадку покрасим в один из семи цветов, вторую — в один из шести оставшихся цветов и т. д. Получим

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

различных окрасок. Однако есть раскраски, которые получаются друг из друга поворотами. На рис. 32 показан пример семи раскрасок, причём раскраски со второй по седьмую можно совместить с первой, если повернуть их так, чтобы красная лошадка получила номер 1.

Таким образом, раскраски разбиваются на группы по семь штук, которые нужно отождествить.

Следовательно, всего раскрасок не 5040, а в семь раз меньше: $5040 : 7 = 720$.

Рис. 32

Раскраски браслета

Несколько более сложное отождествление возникает, если нужно перечислить круговые (циклические) расположения элементов, где не важен порядок их следования — по часовой стрелке или против часовой стрелки.

Пример 6. Браслет состоит из шести бусин, соединённых цепочкой. Сколько существует способов раскрасить бусины в шесть разных цветов так, чтобы раскраски различались?

Решение. Задача похожа на задачу о карусели, но есть одно важное отличие — ожерелье можно не только поворачивать, но ещё и перевернуть, тогда порядок следования бусин меняется на противоположный.

Поступим так, как уже поступали, — пронумеруем шарики и по правилу умножения найдём, что общее число раскрасок пронумерованных шариков равно

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Теперь нужно отождествить одинаковые раскраски. Возьмём какую-нибудь одну раскраску (например, где зелёная бусина имеет номер 1). Ещё пять раскрасок отличаются от неё только поворотом (см. рис. 33).

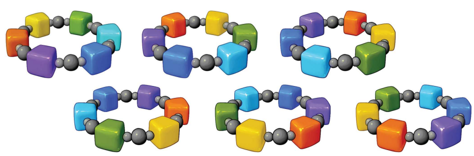


Рис. 33

Но есть ещё шесть раскрасок, которые отличаются друг от друга поворотом, а от первых шести — порядком следования бусин (см. рис. 34).

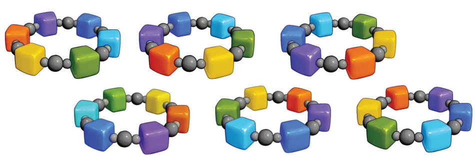


Рис. 34

Все 12 нарисованных браслетов на самом деле раскрашены одинаково. Значит, все раскраски разбиваются на группы по 12 штук. Поэтому общее число различных раскрасок не 720, а в 12 раз меньше: $720 : 12 = 60$.

Упражнения

315. Сколько упорядоченных троек можно сделать из трёх разных предметов?

316. Сформулируйте правило — как найти число неупорядоченных троек, если известно число упорядоченных троек, составленных из тех же элементов.

317. В пространстве дано несколько точек. Сколько отрезков потребуется, чтобы соединить каждые две точки, если всего точек:

а) 4; б) 5; в) 8; г) 12; д) n?

318. Сколько диагоналей:

а) в восьмиугольнике; б) в 27-угольнике; в) в n-угольнике?

319. Семь подруг обменялись фотографиями — каждая подарила по одной своей фотографии каждой из остальных подруг. Сколько всего фотографий было подарено?

320. Кость домино состоит из двух полей, на каждом поле от 0 до 6 очков. Сколько всего костей домино в наборе?

321. Экспериментатор бросает монету, а затем — правильную кость.

а) Сколько всего исходов в таком эксперименте?

б) Сколько будет исходов, если экспериментатор сначала будет бросать кость, а потом монету?

322. Сколько разных путей ведёт из точки S в точку F? (Путь складывается из отдельных дорожек, ведущих сверху вниз.)

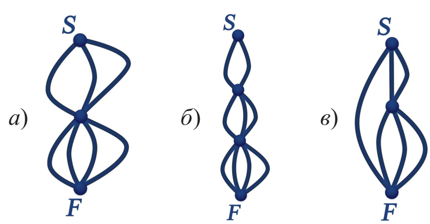


Рис. 35

323. Сколько существует способов составить очередь из четырёх человек?

324. Сколько существует способов заполнить таблицу 3×3 нолями и единицами по одной цифре в каждой клетке?

325. Фразу «*изучать комбинаторику полезно*» можно сказать по-разному, переставляя слова. Сколько есть способов?

326. Фразу «*Джим, дай мне лапу*» можно сказать, переставляя слова по-разному. Сколько есть способов?

327. На фасаде дома 12 окон. В каждом свет либо есть, либо нет. Сколько может быть всего комбинаций?

328. Сколько всего существует семизначных телефонных номеров (номер не должен начинаться на 0 и на 8)?

329. В товарном штрих-коде чёрные и белые штрихи могут следовать в любом порядке. Ширина каждого штриха 0,5 мм. Сколько может быть разных штрих-кодов, занимающих общую ширину 3 см?

330. Идентификатор файла базы данных состоит из 32 символов. Каждый символ — шестнадцатеричная цифра, то есть символ из множества

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).$$

а) Сколько возможно различных идентификаторов? Ответ запишите в виде степени числа 2.

б)* Сколько цифр в десятичной записи полученного числа?

в)* Как вы думаете, как можно охарактеризовать событие

$$A = \left\{\begin{array}{c}\text{где-нибудь на Земном шаре в каких-нибудь базах данных}\\ \text{какие-нибудь два идентификатора случайно совпали}\end{array}\right\}?$$

331. На улице в ряд стоит семь домов. Хозяева решили покрасить свои дома. Сколько существует способов раскраски, если в местном магазине продаются краски:

а) 3 цветов; б) 7 цветов; в) n цветов?

332. На улице в ряд стоит семь домов. Хозяева решили покрасить свои дома, но так, чтобы не все дома были одинаковыми. Сколько существует способов раскраски, если в местном магазине продаются краски:

а) 3 цветов; б) 7 цветов; в) n цветов?

333*. На карусели семь одинаковых лошадок, стоящих по кругу. Сторож весной решил покрасить этих лошадок таким образом, чтобы не все лошадки были одинаковые. У сторожа есть краски n разных цветов. Сколько существует разных способов покрасить карусель?

334*. Докажите *малую теорему Ферма*: если n — натуральное число, а p — простое число, то $n^p - n$ делится на p.

§ 15. Число перестановок. Факториал

Перестановкой из n предметов называется какой-нибудь один способ упорядочить n предметов.

Пример 7. Из набора $1, 2, 3, 4, 5$ можно сделать много перестановок, например $2, 1, 4, 3, 5$ или $5, 3, 1, 4, 2$. Получившиеся наборы (включая исходный) — перестановки пяти цифр.

Не обязательно переставлять сами предметы. Достаточно их пронумеровать. Поэтому можно сказать иначе: перестановка из n предметов — это способ занумеровать n предметов числами от 1 до n.

Чем предметов больше, тем больше перестановок. Например, два предмета A и B можно упорядочить только двумя способами: AB и BA. Если предметов три, то есть уже шесть способов.

Общую формулу для числа перестановок n предметов можно получить с помощью правила умножения. Первый предмет выбирается из n предметов, второй — из $n-1$ оставшихся, третий — из $n-2$ оставшихся и т. д. Когда остаётся один предмет, он ставится последним. Получается формула для ***числа перестановок***:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Такое произведение всех натуральных чисел от 1 до n называют ***факториалом числа*** n («эн факториал») и обозначают $n!$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Нужно определить ***факториал нуля***. Полагают по определению $0! = 1$.

Для натуральных n верно равенство $n! = (n-1)! \cdot n$. Поэтому факториалы удобно вычислять последовательно:

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 2! \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{и т. д.}$$

В таблице даны факториалы для $n = 1, 2, \ldots, 10$.

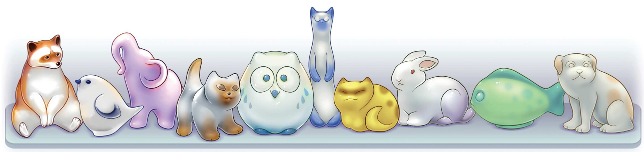
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Видно, что с ростом n факториал $n!$ растёт очень быстро.

Упражнения

335. Сколько существует разных последовательностей, составленных из букв A, B, C и цифр 7, 8 и 9, если каждая буква и цифра используется ровно один раз?

336. Продавец сувенирной лавки каждое утро выставляет на витрину в ряд 10 разных статуэток. Каждый раз он ставит их по-новому, ни разу не повторяясь. Хватит ли ему 10 лет, чтобы перепробовать все возможные способы?



337. Сколько существует семизначных телефонных номеров, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, если каждая цифра используется ровно один раз?

338. Сколько существует вариантов расположить в произвольном порядке:

а) буквы русского алфавита; б) буквы латинского алфавита?

339. Во сколько раз число перестановок русских букв превышает число перестановок латинских?

340. Сколько слов (не обязательно осмысленных) можно составить из букв Т, О, Р и Г? (Каждую букву нужно использовать ровно один раз.)

341. Сколько существует способов поставить три крестика на поле 3×3 для игры в крестики-нолики так, чтобы никакие два крестика не находились на одной вертикали или горизонтали? На рис. 36 показана одна из возможных расстановок.

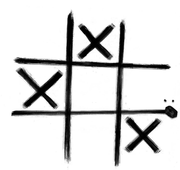


Рис. 36

342. Сколько существует способов поставить восемь ладей на шахматную доску так, чтобы никакие две ладьи не били друг друга? На рис. 37 показана одна из возможных расстановок.

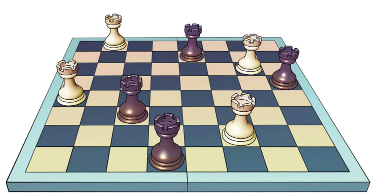


Рис. 37

§ 16. Число сочетаний C_n^k

16.1. Формула числа сочетаний

Из n различных предметов требуется выбрать k штук, при этом не важно, в каком порядке. Это можно сделать разными способами. Количество способов обозначим C_n^k (читается «цэ из эн по ка»). Число C_n^k называют ***числом сочетаний из n по k.***

Составим упорядоченный набор из k предметов, выбирая их из n имеющихся предметов. Применим правило умножения: на первое место можно поставить любой из n предметов, на второе — любой из $n-1$ оставшихся предметов и т. д. Перемножим k множителей, каждый из которых на единицу меньше предыдущего. Подумаем, какой множитель будет последним. К этому моменту мы уже взяли $k-1$ предмет, поэтому нетронутых предметов осталось $n-(k-1)$. Получаем произведение:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)).$$

Столько существует способов выбрать k предметов в определённом порядке из имеющихся n предметов.

Учтём теперь, что порядок выбранных предметов не важен. Поэтому все перестановки k выбранных предметов нужно отождествить. Перестановок всего $k!$. Следовательно,

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!}.$$

Опишем полученный алгоритм словами. Чтобы вычислить C_n^k, нужно написать в числителе дроби произведение k множителей по убыванию, начиная с n, а в знаменателе k множителей по возрастанию, начиная с единицы. Например,

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Если в нашем примере мы продолжим произведения в числителе и в знаменателе, то получим другую запись:

$$C_8^3 = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{(1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} = \frac{8!}{3! \cdot 5!}.$$

В общем виде формула для числа сочетаний принимает вид

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В таком виде число сочетаний удобно записывать, но не слишком удобно вычислять.

Факториал нуля известен: $0! = 1$. Это позволяет определить числа C_n^0, C_n^n и C_0^0, пользуясь общей формулой $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$C_0^0 = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1.$$

Аналогично $C_n^0 = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ и $C_n^n = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$.

Упражнения

343. Вычислите: а) C_n^0; б) C_n^n; в) C_n^1; г) C_n^{n-1}.

344. Из четырёх экзаменов — по истории, химии, литературе и биологии — выпускник планирует выбрать два. Выпишите все возможные варианты выбора.

345. Вычислите: а) C_6^2 и C_6^4; б) C_7^3 и C_7^4; в) C_9^3 и C_9^6.

346. Опираясь на смысл числа сочетаний, докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство. Число сочетаний C_n^k есть число способов выбрать (отложить в сторону) k предметов из n предметов. Но это то же самое, что оставшиеся $n-k$ предметов отложить в другую сторону. Это можно сделать C_n^{n-k} способами. Отсюда и следует, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. ◄

347. Докажите, что $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

348. Сколько существует последовательностей длины 7, в которых ровно три буквы A и четыре буквы B?

349. В пространстве даны точки, никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках, если всего точек:

а) 4; б) 5; в) 8; г) 12; д) n?

350. На плоскости дано несколько прямых. Каждые две прямые пересекаются, но никакие три не проходят через одну точку. Сколько треугольников образовано этими прямыми, если всего прямых:

а) 4; б) 5; в) 8; г) 12; д) n?

351. В пространстве дано несколько плоскостей. Каждые две плоскости пересекаются, но никакие три не пересекаются по одной прямой. Сколько всего получается прямых пересечений, если плоскостей:

а) 4; б) 5; в) 8; г) 12; д) n?

352. В пространстве дано несколько плоскостей таким образом, что любые четыре плоскости ограничивают некоторый тетраэдр. Сколько всего тетраэдров образуют эти плоскости, если плоскостей:

а) 4; б) 7; в) 9; г) 12; д) n?

353. В пространстве даны точки, никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Сколько существует тетраэдров с вершинами в данных точках, если всего точек:

а) 6; б) 9; в) 12; г) 15; д) n?

354. Биатлонист стреляет в 10 мишеней. Обозначим буквой У попадание и буквой Н промах. Может, например, случиться такая последовательность выстрелов: УННУУУНУУН. А сколько всего разных последовательностей выстрелов может быть с шестью попаданиями?

355. На подъезде стоит механический кодовый замок с десятью кнопками. Чтобы открыть замок, нужно нажать три определённые кнопки одновременно. Сколько существует различных комбинаций?

356. На научной конференции каждый из учёных пожал руки всем остальным. Сколько произошло рукопожатий, если учёных было:

а) 4; б) 5; в) 6; г) 9; д) n?

357. На уроке учитель планирует вызвать 5 учащихся к доске. Всего в классе 25 человек. Сколько возможных комбинаций есть у учителя?

358. В семизначном телефонном номере есть цифры 3, 5 и 8. Остальные цифры единицы. Сколько существует таких номеров?

359. Сколько существует способов расставить четыре крестика и пять ноликов на поле 3×3 клетки? Наличие или отсутствие выигрышных комбинаций не играет роли.

360. В цирке шесть учёных ворон — одна белая, остальные чёрные.

а) Сколько существует способов выбрать одну белую и трёх чёрных ворон?

б) Сколько существует способов выбрать четырёх чёрных ворон?

в) Сколько всего есть способов выбрать четырёх ворон?

г) Как связаны три числа, полученные при решении заданий а); б) и в)?

361. Есть 100 лампочек — одна перегоревшая, остальные исправные. Из этих лампочек наудачу выбирают 45 штук.

а) Сколько существует способов выбрать одну неисправную лампочку и 44 исправные?

б) Сколько существует способов выбрать 45 исправных лампочек?

в) Сколько всего существует способов выбрать 45 лампочек?

г)* Как связаны три числа, полученные при решении заданий а); б) и в)?

362. Сколько существует способов представить натуральное число n в виде суммы k натуральных слагаемых (суммы, имеющие разный порядок слагаемых, считаются разными)?

Решение. Нарисуем в ряд n кружков. Отделим слева один или несколько кружков чертой — это будет первое слагаемое в разбиении. Потом ещё несколько — это будет второе слагаемое — и т. д. Чтобы отделить друг от друга k слагаемых, нам потребуется $k-1$ черта, каждая из которых ставится между какими-нибудь двумя кружками.

Например, для разбиения 2, 4, 3, 2 числа 11 получается такая конструкция:

$$\bullet \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet$$

Всего кружков n, значит, промежутков между ними $n-1$. Всего $k-1$ черта. Следовательно, существует C_{n-1}^{k-1} таких разбиений.

363*. В семизначном телефонном номере есть цифры 3, 5 и 8. Все цифры встречаются ровно по одному разу. Первая цифра может быть нулём. Сколько существует таких номеров?

364*. Лестница состоит из 10 ступенек. Можно прыгнуть на любое количество ступенек. Сколько есть разных способов преодолеть лестницу тремя прыжками?

365*. В киоске продаются красные, синие и белые воздушные шары. Всего нужно купить 12 шаров, причём нужно хотя бы по одному шару каждого цвета. Сколько возможно комбинаций?

366*. В магазине продаются красные, синие и белые воздушные шары. Всего нужно купить 12 шаров. Цвета роли не играют. Сколько теперь возможно комбинаций?

367*. а) На шахматную доску 8×8 поставили семь одинаковых ладей так, чтобы никакие две не били друг друга (ладьи бьют друг друга, если они находятся на одной вертикали или горизонтали).

а) Сколько существует способов такой расстановки?

б) Решите более общую задачу для доски $n \times n$ клеток и k ладей ($k \leqslant n$).

16.2. Рекуррентное свойство чисел C_n^k

Теорема. Для всех $n \geqslant 2$ и для всех k от 1 до $n-1$ верно равенство

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}.$$

Доказательство. Пусть имеется n предметов — один из них назовём особым, остальные $n-1$ предметов — обычные. Выберем k предметов $(0<k<n)$. Есть две возможности.

1. Все k предметов обычные. Таких сочетаний C_{n-1}^k.
2. Обычных предметов $k-1$, а один предмет особый. Таких сочетаний C_{n-1}^{k-1}.

Но тем самым мы учли все сочетания — с особым предметом и без него. А всего сочетаний C_n^k. Значит, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. ◀

Полученное равенство называется ***рекуррентной формулой***[1] ***для чисел*** C_n^k.

16.3. Треугольник Паскаля

Рекуррентная формула позволяет находить числа C_n^k последовательно, переходя от меньших n к большим. Чтобы увидеть, как это получается, построим треугольную числовую таблицу. Вершиной треугольника будет $C_0^0 = 1$. В каждом ряду на одно число больше, чем в предыдущем. Числа каждого следующего ряда получаются по следующим правилам.

1. Крайние числа в каждом ряду равны 1.
2. Не крайнее число в ряду равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущем ряду.

Мы получили ***арифметический треугольник***, или ***треугольник Паскаля***[2].

Строки и столбцы треугольника (столбцы наклонные) нумеруются с нуля. Пользуясь треугольником Паскаля, легко находить C_n^k для не очень больших n. Например, найдём C_6^4. В шестой строке четвёртое число равно 15 (см. рис. 38). Значит, $C_6^4 = 15$.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
. . . .

Рис. 38

[1] Рекурсией называют последовательное вычисление членов последовательности с помощью ранее найденных членов. Полученная формула позволяет находить числа C_n^k для каждого n, если уже найдены числа для предыдущего n. Поэтому эту формулу называют рекуррентной.

[2] По имени французского учёного Блеза Паскаля, изучавшего свойства этого треугольника.

368. Выпишите первые 10 строк треугольника Паскаля.

369. Пользуясь треугольником Паскаля, найдите:

а) $C_6^3, C_8^2, C_9^5, C_{10}^4$; б) $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$; в) $C_5^0-C_5^1+C_5^2-C_5^3+C_5^4-C_5^5$.

370. Достройте треугольник Паскаля до двенадцатой строки. С помощью своего построения найдите:

а) C_{11}^3; б) C_{12}^7; в) C_{12}^8; г) C_{12}^9.

371. Пользуясь результатами выполнения предыдущей задачи, найдите:

а) C_{13}^8; б) C_{13}^9.

372. Схема дорожек показана на рис. 39. Двигаться по дорожкам можно только вниз. Сколько разных путей ведёт из точки старта S в точку финиша F?

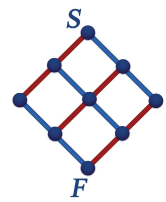


Рис. 39

Решение. Раскрасим дорожки: те, что ведут вниз-вправо, в синий цвет, а те, что ведут вниз-влево, — в красный. Любой путь из S в F состоит из четырёх дорожек, среди которых ровно две синие. Это число равно $C_4^2=6$.

373. На рис. 40 показана схема дорожек. Двигаться по дорожкам можно только вниз. Сколько разных путей ведёт из точки S в точку:

а) F_0; б) F_1; в) F_2; г) F_3; д) F_4; е) F_5?

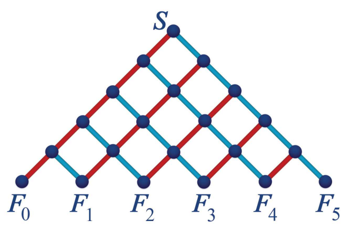


Рис. 40

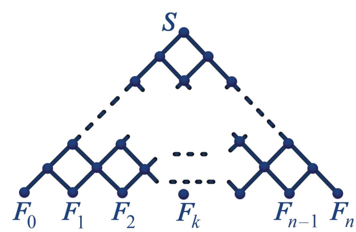


Рис. 41

374. Схема дорожек такая же, как в задаче 373, только рядов стало больше (см. рис. 41) Сколько разных путей ведёт из точки S в точку F_k $(0<k<n)$?

16.4. Формула бинома Ньютона

Сейчас нас интересует вопрос, как раскрыть скобки в выражении $(a+b)^n$, где n — любое натуральное число. Для $n=2$ и $n=3$ ответ дают формулы сокращённого умножения:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3.$$

Если вы не помните эти тождества, проверьте их справедливость непосредственным умножением.

Выпишем из формул только коэффициенты:

$$\begin{array}{lccccccc} n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 \\ n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & 1 \end{array}$$

Эти последовательности совпадают со второй и третьей строками треугольника Паскаля. Вряд ли такое совпадение случайно. Докажем это.

Раскроем скобки в выражении $(a+b)^n$. Получится сумма, состоящая из множества слагаемых:

$$(a+b)^n = a^n + ... + \underbrace{(a^k b^{n-k} + a^k b^{n-k} + ... + a^k b^{n-k})}_{\text{сколько таких слагаемых?}} + ... + b^n.$$

В правой части каждое слагаемое является произведением n множителей. Каждая скобка вносит в произведение свой вклад в виде одного множителя — a или b.

Возьмём, например, слагаемое $a^k b^{n-k}$. Сколько раз оно встретится? Очевидно, столько, сколько есть способов выбрать k мест для множителя a в произведении n множителей. Таких способов ровно C_n^k.

Следовательно, слагаемое $a^k b^{n-k}$ встречается в сумме ровно C_n^k раз. Поэтому

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + ... + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n.$$

Полученное тождество называют ***формулой бинома[1] Ньютона***.

Пример 8. Получим формулу для $(a+b)^6$. Для этого нужно записать слагаемые a^6, $a^5 b$, $a^4 b^2$ и далее до b^6, снабдив их коэффициентами из шестой строки треугольника Паскаля:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Правило простое — в каждом следующем слагаемом показатель степени у a уменьшается на единицу, показатель у b увеличивается на единицу, а коэффициенты берутся из соответствующей строки треугольника Паскаля.

[1] Бином означает двучлен.

Упражнения

375. Известно, что $p+q=1$. Найдите значение выражения:
а) $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$; б) $p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^3$.

376. Известно, что $a+b=2$. Найдите значение выражения:
а) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; б) $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^3$.

377. Представьте в стандартном виде многочлен:
а) $(x+1)^5$; б) $(y+2)^4$; в) $(x+y)^4$; г) $(x+a)^7$.

378. Выведите формулу для $(a-b)^n$.

379. Докажите, что $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$, то есть сумма чисел в n-й строке треугольника Паскаля равна 2^n.

Доказательство. Запишем формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1}a^{n-1}b + C_n^{n-2}a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^0 b^n$$

и положим в ней $a=b=1$. В левой части получится 2^n, а в правой

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n.$$ ◄

380*. Найдите бесконечную сумму

$$\frac{1}{C_0^0}+\frac{1}{C_1^0+C_1^1}+\frac{1}{C_2^0+C_2^1+C_2^2}+\ldots$$

381. Докажите, что знакочередующаяся сумма чисел в n-й строке треугольника Паскаля равна нулю.

382. Представьте степень в виде суммы одночленов:
а) $(x+1)^5$; б) $(y-1)^6$; в) $(z+2)^4$; г) $(m-2)^7$.

383. Решите уравнение $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x=31$.

384*. Упростите выражение
$C_{100}^0\sin^0 x\cdot\cos^{200}x+C_{100}^1\sin^2 x\cdot\cos^{198}x+\ldots+C_{100}^{100}\sin^{200}x\cdot\cos^0 x$.

Глава IX

Испытания Бернулли и биномиальное распределение

§ 17. Испытания Бернулли

17.1. Успех и неудача

Напомним, что ***испытанием Бернулли*** называют случайный опыт, который заканчивается одним из двух элементарных событий. Например, подброшенная монета падает либо орлом, либо решкой вверх. Стрелок может попасть в мишень, а может промахнуться. Ученик в контрольной работе может дать верный ответ, а может — неверный. Мы многократно встречались с такими опытами.

Одно из двух элементарных событий в таких опытах условно называют ***успехом***, а другое — ***неудачей***.

Вероятность успеха обычно обозначают p. Тогда вероятность неудачи равна $1 - p$. Для краткости обозначим это число q.

Под одинаковыми испытаниями Бернулли мы будем понимать испытания, в которых вероятности успеха p и неудачи q одинаковы.

Далее мы будем говорить только о последовательностях независимых и одинаковых испытаний Бернулли — сериях.

Серией испытаний Бернулли называется опыт, состоящий из независимых и одинаковых испытаний Бернулли.

На протяжении всей главы нас будут интересовать случайные величины S — число успехов и $\frac{S}{n}$ — частота успеха в серии из n испытаний Бернулли.

Серия испытаний Бернулли является случайным экспериментом, элементарные исходы которого состоят из последовательностей успехов и неудач. Обозначим успех буквой У, а неудачу буквой Н. Пусть серия состоит из n испытаний. Тогда элементарные исходы в этой серии испытаний можно записать как последовательности, состоящие из букв У и Н. В каждой такой последовательности ровно n

символов. Буквы У и Н идут в том порядке, в котором наступают успехи и неудачи. Примеры элементарных исходов: УУУ...У, НУУ...У, УНУ...У и т. д.

Сколько всего элементарных исходов в серии из n испытаний Бернулли? Ответить на этот вопрос нам поможет обычное комбинаторное правило умножения. На каждое из n мест можно поставить либо успех (У), либо неудачу (Н). Поэтому существует всего 2^n различных последовательностей из букв У и Н длины n. Следовательно, ***в серии из n испытаний Бернулли всего 2^n элементарных событий***.

17.2. Вероятность элементарного события в серии испытаний Бернулли

Серию испытаний Бернулли можно рассматривать как составной опыт. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи равна q. Пользуясь независимостью отдельных испытаний, можно найти вероятности элементарных исходов.

Пусть, для примера, серия состоит из пяти испытаний. Найдём вероятность исхода УУННУ. По формуле умножения вероятностей независимых событий

$$\mathrm{P}(\text{УУННУ}) = p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot p = p^3 q^2.$$

Очевидно, такая же вероятность будет у любого исхода, в котором три успеха и две неудачи.

Таким образом, вероятность элементарного события в серии испытаний Бернулли ***не зависит от порядка чередования успехов и неудач, а зависит только от их количества***.

Вероятность любого элементарного исхода, содержащего k успехов в серии из n испытаний Бернулли, равна $p^k q^{n-k}$.

Пример 1. Игральную кость бросают четыре раза. Найдём вероятность того, что шестёрка выпадет только при первом и третьем бросках.

Решение. Пусть успех — выпадение шестёрки, а неудача — выпадение любого другого числа очков. Тогда вероятность успеха $p = \frac{1}{6}$, а $q = \frac{5}{6}$.

Следовательно, вероятность нужного нам события равна

$$p^2 q^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{1296} \approx 0{,}019.$$

Получается, что такое событие случается нечасто.

Пример 2. В части А варианта ЕГЭ по русскому языку 30 заданий. К каждому из них предлагается четыре варианта ответа, из которых только один верный. Предположим, что все ответы выпускник даёт случайно. Поэтому вероятность успеха (ответ верный) равна $p = \frac{1}{4}$. Найдём вероятность того, что при этих условиях все ответы окажутся неверными.

Решение. Вероятность неудачи (ответ неверный) $q = \frac{3}{4}$. Вероятность 30 неверных ответов равна

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{30} \approx 0{,}0002.$$

Таким образом, событие «все ответы неверные» практически невозможное, если заполнять бланк случайным образом.

§ 18. Случайная величина «число успехов»

18.1. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли

Рассмотрим случайную величину S — число успехов в серии из n испытаний Бернулли. Она принимает целые значения от 0 до n. Нас интересует событие $S = k$. Оно состоит в том, что наступило ровно k успехов. При этом порядок чередования успехов и неудач не важен. Событию $S = k$ благоприятствуют элементарные события, вероятность каждого из которых равна $p^k q^{n-k}$. Сколько существует таких элементарных событий? Каждое из них записывается последовательностью букв У и Н, причём всего n букв и ровно k из них — буквы У. Общее число таких последовательностей равно C_n^k.

Значит, в серии из n испытаний Бернулли ровно C_n^k элементарных событий, содержащих k успехов и $n - k$ неудач.

Следовательно,

$$\mathrm{P}(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Эту формулу несложно запомнить: C_n^k — число элементарных исходов, p^k символизирует k успехов, а q^{n-k} символизирует оставшиеся $n - k$ неудач.

Пример 3. Предположим, что мы стреляем в мишень, а вероятность попадания $\frac{1}{3}$. Всего производится семь выстрелов. Вопрос: какова вероятность попасть в мишень ровно три раза?

Решение. Этот опыт — серия из семи испытаний Бернулли, с вероятностью успеха $p=\frac{1}{3}$ и вероятностью неудачи $q=1-p=\frac{2}{3}$. По общей формуле

$$\mathrm{P}(S=3)=C_7^3\cdot p^3q^4=35\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\approx 0{,}256.$$

18.2. Распределение случайной величины «число успехов»

Вычислив вероятности событий $S=k$, мы получаем распределение случайной величины S:

$$S\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots & n\\ q^n & C_n^1pq^{n-1} & C_n^2p^2q^{n-2} & \dots & C_n^kp^kq^{n-k} & \dots & p^n\end{pmatrix}.$$

Это распределение вероятностей называется ***биномиальным***. Числа n и p называются параметрами этого распределения.

Название этого распределения объясняется его связью с формулой бинома. Как известно,

$$(p+q)^n=C_n^0p^0q^n+C_n^1p^1q^{n-1}+C_n^2p^2q^{n-2}+\dots+C_n^kp^kq^{n-k}+\dots+C_n^np^nq^0.$$

Поскольку $p+q=1$, сумма вероятностей в таблице распределения равна 1.

Пример 4. Имеется серия из пяти испытаний Бернулли с $p=\frac{1}{2}$. Построим распределение случайной величины «число успехов».

Решение. Вероятность неудачи q также равна $\frac{1}{2}$. Поэтому

$$S\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \left(\frac{1}{2}\right)^5 & C_5^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 & C_5^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 & C_5^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 & C_5^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 & \left(\frac{1}{2}\right)^5\end{pmatrix}.$$

Подставив значения коэффициентов C_5^k, получим

$$S\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32}\end{pmatrix}.$$

Для наглядности мы не стали сокращать дроби.

Пример 5. Биномиальное распределение для $n=16$ при $p=0{,}25$.

Вычисления в этом примере мы приводить не будем. Вы можете их проверить с помощью калькулятора или компьютера:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16\\ 0{,}01 & 0{,}053 & 0{,}134 & 0{,}208 & 0{,}225 & 0{,}18 & 0{,}11 & 0{,}052 & 0{,}02 & 0{,}006 & 0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

В таблице значения округлены до тысячных. Начиная с 11 успехов вероятности настолько малы, что округление превратило их в нули.

Из таблицы хорошо видно, что распределение несимметрично. Этого и следовало ожидать в нашем примере, где $p \neq q$.

18.3. Вероятности более сложных событий

Рассмотрим теперь более сложные события, состоящие в том, что число успехов заключено в некоторых пределах, то есть сейчас нас интересует вероятность события $k \leqslant S \leqslant m$.

Чтобы найти $\mathrm{P}(k \leqslant S \leqslant m)$, нужно сложить вероятности событий $S = k$, $S = k+1$, ..., $S = m$:

$$\mathrm{P}(k \leqslant S \leqslant m) = C_n^k p^k q^{n-k} + C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1} + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m}.$$

В практических задачах чаще всего приходится вычислять именно такие суммы. Сейчас это можно сделать быстро с помощью компьютера. Раньше, когда вычислительных машин не было, нужны были сложные методы приближённых вычислений.

Пример 6. Найдём вероятность того, что при восьми бросаниях игральной кости шестёрка выпадет не менее четырёх, но не более шести раз.

Решение. Имеем

$$\mathrm{P}(4 \leqslant S \leqslant 6) = C_8^4 p^4 q^4 + C_8^5 p^5 q^3 + C_8^6 p^6 q^2 =$$

$$= 70 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 + 56 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 28 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}0344.$$

Пример 7. В части А варианта ЕГЭ по русскому языку 30 заданий. Минимальный требуемый балл равен 17. Какова вероятность дать не менее 17 верных ответов, случайным образом отвечая на вопросы?

Решение. Нас интересует событие $S \geqslant 17$. Вероятность успеха при выполнении одного задания нам известна: $p = \frac{1}{4}$. Вероятность неудачи $q = \frac{3}{4}$. Вероятность события $S \geqslant 17$ складывается из вероятностей событий $S = 17$, $S = 18$, $S = 19$ и так далее до $S = 30$:

$$\mathrm{P}(S \geqslant 17) = C_{30}^{17}\left(\frac{1}{4}\right)^{17}\left(\frac{3}{4}\right)^{13} + C_{30}^{18}\left(\frac{1}{4}\right)^{18}\left(\frac{3}{4}\right)^{12} + \ldots + C_{30}^{30}\left(\frac{1}{4}\right)^{30}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} \approx 0{,}0002.$$

Таким образом, при случайном выборе ответов событие «не менее 17 верных ответов» практически невозможное.

В некоторых задачах удобно вместо вероятности нужного события сначала найти вероятность противоположного события.

Пример 8. Найдём вероятность того, что в серии из шести испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}3$ наступит хотя бы один успех.

Решение. Вместо события $S \geqslant 1$ рассмотрим противоположное событие $S = 0$. Вероятность этого события найти несложно. Учитывая, что вероятность неудачи q равна 0,7, получаем

$$\mathrm{P}(S \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(S = 0) = 1 - C_6^0 p^0 q^6 = 1 - 0{,}7^6 \approx 0{,}882.$$

Упражнения

385. Пользуясь обозначениями У и Н для успеха и неудачи, перечислите все элементарные исходы в серии из трёх испытаний Бернулли.

386. Сколько всего элементарных исходов в серии из:

а) четырёх испытаний Бернулли? б) пяти испытаний Бернулли?

387. Выпишите все элементарные исходы в серии из пяти испытаний Бернулли, которые начинаются тремя успехами подряд.

388. Выпишите все элементарные исходы в серии из шести испытаний Бернулли, в которых есть:

а) ровно пять неудач; б) ровно четыре успеха; в) менее трёх успехов.

389. Укажите в таблице, сколько в серии из четырёх испытаний Бернулли элементарных событий без успехов, с одним успехом, с двумя успехами и т. д.

Число успехов	0	1	2	3	4
Число благоприятствующих элементарных событий					

390. Эксперимент состоит из пяти испытаний Бернулли. Пользуясь обозначениями У для успеха и Н для неудачи, выпишите все элементарные события, в которых ровно:

а) один успех; б) два успеха; в) три успеха; г) четыре успеха.

391. В испытании Бернулли известна вероятность успеха p. Найдите вероятность неудачи q, если:

а) $p = \frac{1}{4}$; б) $p = 0{,}02$; в) $p = \frac{2}{7}$; г) $p = 0{,}83$.

392. В части А варианта ЕГЭ по русскому языку 30 заданий. К каждому из них предлагается четыре варианта ответа, из которых только один верный. Предположим, что все ответы выпускник даёт случайно. Какова вероятность того, что выпускник даст верный ответ:

а) на первое задание; б) на первые два задания;

в) только на первое задание; г) только на первые два задания?

393. Выпишите все элементарные события, благоприятствующие:

а) 2 успехам в серии из 4 испытаний Бернулли;

б) 5 успехам в серии из 6 испытаний Бернулли.

394. Сколько элементарных событий в серии из 8 испытаний Бернулли благоприятствует:

а) 2 успехам; б) 6 успехам; в) 5 успехам; г) 3 успехам?

395. Сколько разных элементарных событий благоприятствует появлению 3 орлов, если монету бросают:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 7 раз; г) 9 раз; д) n раз?

396. Проводится серия из 10 испытаний Бернулли. Каких элементарных событий больше: тех, что благоприятствуют трём успехам, или тех, что благоприятствуют семи успехам?

397. Произведена серия из n испытаний Бернулли. Найдите n, если общее число различных элементарных событий равно:

а) 16; б) 64; в) 256; г) 2048; д) 2^m.

398. Докажите, что в серии из 15 испытаний Бернулли число возможных элементарных событий, благоприятствующих шести успехам, равно числу элементарных событий, благоприятствующих:

а) девяти неудачам; б) девяти успехам; в) шести неудачам.

399. Производится серия из n испытаний Бернулли. Выразите формулой число элементарных событий, которые благоприятствуют появлению:

а) 2 или 3 успехов; б) не более 5 успехов;

в) 4, 6 или 9 успехов; г) более $n-4$ успехов;

д) менее 4 неудач; е) 2, 3 или 4 неудач.

400*. Найдите число элементарных событий в серии из 134 испытаний Бернулли, которые благоприятствуют появлению:

а) 133 успехов; б) 1 успеха.

401. В некотором испытании Бернулли успех наступает с вероятностью $p = 0{,}5$. Найдите вероятность того, что в серии из четырёх таких испытаний:

а) наступило ровно два успеха; б) наступил ровно один успех;

в) наступило ровно три успеха; г) все испытания окончились неудачей.

402. Найдите вероятность появления ровно трёх орлов в серии бросаний симметричной монеты, если монету бросают:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 7 раз; г) 9 раз; д) 8 раз; е) n раз.

403. Игральную кость бросают шесть раз. Найдите вероятность того, что пятёрка выпадет:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 1 раз; г) 6 раз; д) 2 раза; е) ни разу.

404. В некотором испытании Бернулли успех наступает с вероятностью $p = 0{,}4$. Найдите вероятность того, что в серии из 4 таких испытаний:

а) наступило более двух успехов;

б) наступило не более двух неудач;

в) не все испытания окончились неудачей;

г) наступило меньше четырёх успехов.

405. В некотором испытании Бернулли неудача наступает с вероятностью $q = \frac{1}{3}$. Найдите вероятность того, что в серии из пяти таких испытаний:

а) наступило ровно два успеха; б) наступил ровно один успех;

в) наступило больше двух успехов; г) наступило меньше четырёх успехов.

406. Случайный эксперимент заключается в пятикратном бросании симметричной монеты. Найдите вероятность события:

а) выпадет ровно три орла;

б) выпадет не менее двух, но не более четырёх орлов;

в) выпадет либо одна решка, либо три решки;

г) орёл выпадет нечётное число раз;

д) решка выпадет не менее трёх раз;

е) либо ровно два раза выпадет решка, либо ровно один раз выпадет орёл.

§ 19. Математическое ожидание и дисперсия числа успехов

19.1. Математическое ожидание числа успехов

Теорема. Пусть случайная величина S — число успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда

$$\mathrm{E}S = np.$$

Доказательство. Обозначим число успехов ***в первом*** испытании S_1. Эта величина распределена по закону Бернулли:

$$S_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Найдём математическое ожидание:

$$\mathrm{E}S_1 = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Число успехов во втором испытании назовём S_2. Аналогично $\mathrm{E}S_2 = p$. Поступим так же со всеми испытаниями. Получим последовательность случайных величин $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$, каждая из которых имеет математическое ожидание $\mathrm{E}S_k = p$.

Очевидно, $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$.

Воспользуемся свойством математического ожидания:

$$\mathrm{E}S = \mathrm{E}S_1 + \mathrm{E}S_2 + \mathrm{E}S_3 + \ldots + \mathrm{E}S_n = np.$$

Теорема доказана. ◄

Пример 9. Найдём ожидаемое число удач при $n = 20$ испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}4$.

Решение. Имеем

$$\mathrm{E}S = np = 20 \cdot 0{,}4 = 8.$$

Полученный результат интуитивно понятен: если в среднем наступает 4 успеха в 10 попытках, то в среднем должно быть 8 успехов в 20 попытках.

Упражнения

407. Вспомните и запишите в тетради формулу вероятности k успехов при n испытаниях.

408. Чему равно ожидаемое число успехов при вероятности успеха $p = \frac{1}{2}$ в серии из 20 испытаний? Подбросьте двадцать раз монету, считая успехом выпадение орла. Подсчитайте число наступивших успехов. Совпало ли число успехов с ожидаемым значением?

409. Выберите правильное утверждение.

а) Чем больше вероятность успеха, тем больше ожидаемое число неудач.

б) Чем больше вероятность успеха, тем меньше ожидаемое число неудач.

в) Ожидаемое число успехов зависит только от числа экспериментов и никак не связано с вероятностью неудачи.

410. По полу рассыпали содержимое коробки, в которой лежало сто кнопок. Сколько следует ожидать кнопок, лежащих остриём вверх, если вероятность выпадения кнопки остриём вверх равна 0,35?

411. Игральную кость бросают 120 раз. Найдите математическое ожидание числа опытов, в которых:

а) число выпавших очков будет кратно 3; б) выпадет пятёрка.

412. В тесте из 16 задач каждая задача снабжена 4 вариантами ответа, но только один ответ из четырёх верный. Школьник не готов к тесту и выбирает ответы наугад. Найдите ожидаемое число правильных ответов.

413. Канцелярскую кнопку бросают на стол 300 раз. Известно, что математическое ожидание случайной величины «число выпадений остриём вверх» равно 135. Чему равна вероятность события «кнопка упала остриём вверх»?

19.2. Дисперсия числа успехов

Пусть, как и прежде, случайная величина S — число успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p.

Теорема. Дисперсия случайной величины S равна

$$\mathrm{D}S = npq.$$

Доказательство. Выведем эту формулу тем же способом, что и формулу математического ожидания. Опять воспользуемся тем, что

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n.$$

Отдельные испытания Бернулли независимы, поэтому случайные величины $S_1, S_2, \ldots, S_n$ тоже независимы.

Для независимых случайных величин верно свойство: дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

$$\mathrm{D}S = \mathrm{D}S_1 + \mathrm{D}S_2 + \mathrm{D}S_3 + \ldots + \mathrm{D}S_n.$$

Поэтому достаточно найти дисперсии числа успехов для каждого единичного испытания и затем сложить их. Вот дисперсия случайной величины S_1:

$$\mathrm{D}S_1 = \mathrm{E}S_1^2 - (\mathrm{E}S_1)^2.$$

Случайные величины S_1 и S_1^2 совпадают: $S_1^2 = S_1$. Поэтому

$$\mathrm{E}S_1^2 = \mathrm{E}S_1 = p.$$

Следовательно,

$$\mathrm{D}S_1 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Случайные величины $S_2, S_3, \ldots, S_n$ имеют такие же распределения, что и S_1. Поэтому их дисперсии тоже равны pq. Складывая их, получаем

$$\mathrm{D}S = \mathrm{D}S_1 + \mathrm{D}S_2 + \mathrm{D}S_3 + \ldots + \mathrm{D}S_n = npq. \quad ◄$$

Из доказанного следует, что стандартное отклонение случайной величины S равно $\sqrt{npq}$.

Упражнения

414. Рассмотрите доказательство теоремы в п. 19.2. Почему случайные величины S_1^2 и S_1 совпадают?

415. Увеличивается или уменьшается дисперсия числа успехов при увеличении числа испытаний Бернулли?

416. Чему равна дисперсия случайной величины «число неудач» в серии из n испытаний Бернулли?

417. При каком p дисперсия числа успехов в n испытаниях Бернулли максимальна?

418. По полу рассыпали содержимое коробки, в которой лежало сто кнопок. Кнопка падает остриём вверх с вероятностью 0,35. Найдите дисперсию и стандартное отклонение величины «число кнопок, упавших остриём вверх».

419. Игральную кость бросили 13 500 раз. Рассмотрим случайную величину X:

а) число бросков, при которых выпавшее число очков кратно 3;

б) число бросков, при которых выпала пятёрка.

Найдите $\mathrm{D}(X)$.

420. Производится серия выстрелов по мишени. Вероятность попадания равна $p = 0{,}3$. Случайное число попаданий обозначим S. Найдите дисперсию случайной величины S, если всего произведено:

а) 100 выстрелов; б) 1000 выстрелов; в) 2500 выстрелов.

421*. Докажите, что верно неравенство $\mathrm{D}S \leqslant \frac{1}{4}n$, где $\mathrm{D}S$ — дисперсия случайной величины «число успехов в серии из n испытаний Бернулли». При какой вероятности успеха выполняется равенство $\mathrm{D}S = \frac{1}{4}n$?

Глава X

Закон больших чисел

§ 20. Неравенство Чебышёва

20.1. Неравенство Маркова

Рассмотрим случайный эксперимент, который встречался каждому человеку много раз: ожидание троллейбуса. Предположим, что по опыту мы знаем, что этот троллейбус ходит довольно часто — в среднем каждые 10 минут. Это знание позволяет нам оценить возможную длительность ожидания. Мы рассуждаем так: троллейбус приходит в среднем каждые десять минут. Вполне вероятно, что его придётся ждать 7 минут, или 15 минут, или даже 20 минут. Последнее событие мы считаем менее вероятным, чем десятиминутное ожидание. Получасовое ожидание нам покажется странным, и мы предположим, что что-то случилось, например поломка на маршруте.

Таким образом, чем дальше наблюдаемое значение от среднего, тем менее вероятным оно нам представляется. Это соображение можно выразить математически точно с помощью неравенства Маркова.

Теорема (неравенство Маркова). Предположим, что дискретная случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание $\mathrm{E}X$. Пусть c — произвольное положительное число. Тогда

$$\mathrm{P}(X \geqslant c) \leqslant \frac{\mathrm{E}X}{c}. \tag{1}$$

Доказательство. Возьмём только те значения случайной величины X, которые не меньше чем c. Назовём их $x_1, x_2, ..., x_n$, а их вероятности назовём $p_1, p_2, ..., p_n$.

Рассмотрим сумму

$$x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n.$$

Эта сумма похожа на математическое ожидание случайной величины X, но в ней учтены не все значения X. Те значения, которые не вошли в сумму, неотрицательны. Следовательно, вся эта сумма не может быть больше чем $\mathrm{E}X$:

$$x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n \leqslant \mathrm{E}X.$$

Для всех x_k верно, что $c \leqslant x_k$. Значит, если заменить каждое x_k числом c, сумма может только уменьшиться. По крайней, мере больше она не станет. Поэтому

$$cp_1 + cp_2 + ... + cp_n \leqslant \mathrm{E}X.$$

Вынесем за скобки общий множитель c:

$$c(p_1 + p_2 + ... + p_n) \leqslant \mathrm{E}X.$$

В скобках осталась сумма вероятностей всех тех значений X, которые не меньше чем c. Иными словами, это вероятность события $X \geqslant c$:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = \mathrm{P}(X \geqslant c).$$

Из написанных соотношений получаем, что $c\mathrm{P}(X \geqslant c) \leqslant \mathrm{E}X$. Отсюда следует требуемое неравенство:

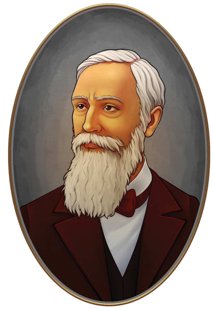
$$\mathrm{P}(X \geqslant c) \leqslant \frac{\mathrm{E}X}{c}.$$ ◄

20.2. Неравенство Чебышёва

Теорема (неравенство Чебышёва). Для всякой случайной величины X, имеющей математическое ожидание $\mathrm{E}X$ и дисперсию $\mathrm{D}X$, и произвольного положительного числа с верно неравенство

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geqslant c) \leqslant \frac{\mathrm{D}X}{c^2}. \tag{1}$$

Андрей Андреевич
Марков



Пафнутий Львович
Чебышёв

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $Y = |X - \mathrm{E}X|$. Она неотрицательна, поэтому событие $Y \geqslant c$ совпадает с событием $Y^2 \geqslant c^2$. Применим к величине Y неравенство Маркова:

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| \geqslant c) = \mathrm{P}(Y^2 \geqslant c^2) \leqslant \frac{\mathrm{E}Y^2}{c^2} = \frac{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2}{c^2} = \frac{\mathrm{D}X}{c^2}. \quad \blacktriangleleft$$

§ 21. Теорема Чебышёва

Следующая ниже теорема даёт простейший вариант так называемого ***закона больших чисел.***

Теорема Чебышёва. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины. Обозначим через m и d их общие математическое ожидание и дисперсию. Пусть случайная величина Y — среднее арифметическое величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Тогда для любого $c > 0$ вероятность события $|Y - m| < c$ стремится к единице при неограниченном увеличении n.

Поскольку $c > 0$ можно взять любым числом, в частности сколь угодно малым, из теоремы Чебышёва вытекает такое следствие.

Следствие (закон больших чисел). При большом n случайная величина Y с близкой к единице вероятностью мало отличается от m.

Доказательство. Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y:

$$\mathrm{E}Y = \frac{\mathrm{E}X_1 + \mathrm{E}X_2 + \ldots + \mathrm{E}X_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m;$$

$$\mathrm{D}Y = \mathrm{D}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot (\mathrm{D}X_1 + \mathrm{D}X_2 + \ldots + \mathrm{D}X_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot d = \frac{d}{n}.$$

Применим к случайной величине Y неравенство Чебышёва. Получим

$$\mathrm{P}(|Y - m| \geqslant c) \leqslant \frac{d}{nc^2}.$$

Отсюда вероятность противоположного события:

$$\mathrm{P}(|Y - m| < c) \geqslant 1 - \frac{d}{nc^2}.$$

Пусть число n неограниченно увеличивается. Тогда число $1 - \dfrac{d}{nc^2}$ стремится к единице.

Заметим, что вероятность события $|Y - m| < c$ не превосходит 1, а поэтому находится между числами $1 - \dfrac{d}{nc^2}$ и 1. Поскольку $1 - \dfrac{d}{nc^2}$ стремится к 1, вероятность $\mathrm{P}(|Y - m| < c)$ также стремится к единице. ◄

Статистический смысл теоремы Чебышёва состоит в следующем. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты каких-либо независимых измерений одной и той же физической величины и эти измерения не содержат систематических ошибок, то их среднее арифметическое с ростом n приближается к истинному значению m этой величины.

Пример 1. Предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — одновременные показания нескольких часов в одном и том же месте. Они могут различаться. Будем предполагать, что все погрешности случайны. Будем считать также, что ошибки в показаниях часов независимы.

Вычислим среднее арифметическое показаний часов. Из теоремы Чебышёва следует, что этому усреднённому времени следует доверять больше, чем отдельным показаниям. При этом, конечно, может оказаться, что какие-то отдельные часы точнее всех и точнее среднего. Но эта мысль нам не поможет: мы ведь не знаем, какие именно это часы. Теорема утверждает, что среднее значение лучше в вероятностном смысле.

§ 22. Теорема Бернулли

Другой частный случай закона больших чисел — теорема Бернулли. Она относится к случайной величине S, равной числу успехов в серии из n испытаний. Теорема Бернулли утверждает, что ***частота события близка к его вероятности*** в том смысле, что они, скорее всего, мало отличаются при большом числе испытаний n.

Иными словами, вероятность события $\left|\frac{S}{n}-p\right|<c$ при большом числе испытаний близка к единице.

Число c может быть любым, но чем меньше c, тем бо́льшим должно быть n.

Теорема Бернулли появилась намного раньше, чем теорема Чебышёва. Но мы не станем приводить исторически первую формулировку и доказательство теоремы Бернулли. Пойдём простым путём: получим теорему Бернулли как частный случай теоремы Чебышёва.

Пусть S — число успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании, случайная величина $\frac{S}{n}$ — частота успеха. Пусть $c>0$ — произвольное положительное число. Оно может быть и сколь угодно малым.

Теорема Бернулли. Вероятность события $\left|\frac{S}{n}-p\right|<c$ стремится к единице при неограниченном увеличении n.

Доказательство. Пусть, как и прежде, S_k — число успехов в испытании с номером k. Тогда $\frac{S}{n}$ — среднее арифметическое величин $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Все эти величины имеют общее математическое ожидание p и общую дисперсию pq.

Применим к случайной величине $\frac{S}{n}$ теорему Чебышёва: вероятность

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S}{n}-p\right|<c\right)$$

стремится к единице при неограниченном увеличении n. Теорема доказана. ◄

22.1. Измерение вероятностей

Что означает теорема Бернулли? Для любых, даже очень малых чисел $c > 0$ и $\alpha > 0$, увеличивая n, можно добиться выполнения неравенства

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S}{n} - p\right| < c\right) \geqslant 1 - \alpha.$$

Например, неравенство

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S}{n} - p\right| < 0{,}05\right) \geqslant 0{,}95$$

будет заведомо верно при $n > 400$.

Пусть в некотором случайном опыте нас интересует вероятность определённого события A. Допустим, что мы можем многократно и независимо осуществлять этот опыт в неизменных условиях, так что от раза к разу $p = \mathrm{P}(A)$ не меняется. Повторим опыт n раз. При этом число опытов n не должно зависеть от исходов отдельных опытов! Можно, например, задать число n заранее.

Подсчитаем число опытов, в которых произошло событие A. Обозначим это число S. Отношение $\frac{S}{n}$ — это частота события A в n опытах. Получается хорошо известная схема — всю совокупность опытов можно рассматривать как серию испытаний Бернулли с вероятностью успеха p.

По теореме Бернулли ***при достаточно большом*** n ***частота события, скорее всего, близка к его вероятности***. Поэтому

$$\frac{S}{n} \approx p.$$

Этот результат даёт практическую возможность измерять вероятности с помощью частот, лишь бы эксперимент можно было многократно повторять.

Вопросы, связанные с точностью измерения и соответствующим правильным подбором n, мы вынуждены оставить за пределами этой книги.

§ 23. Выборочный метод

Испытания Бернулли могут служить простой и удобной приближённой моделью для описания случайного выбора, когда численность всей изучаемой совокупности объектов или людей (***генеральной совокупности***) велика. Предположим, что нас интересует доля объектов, которые обладают определённым свойством, скажем свойством A. Пусть N — численность генеральной совокупности, M —

число объектов со свойством A. Ни N, ни M нам не известны и нас не интересуют. Нас интересует величина

$$p = \frac{M}{N}.$$

Для её оценки случайным образом отбирают n объектов. Обозначим через S случайное число тех отобранных объектов, которые обладают свойством A. Оценкой неизвестного p может служить дробь $\frac{S}{n}$.

Мы говорили прежде, что случайный выбор можно осуществлять, отбирая объекты случайно и последовательно по одному. Успехом при этом можно называть выбор объекта со свойством A.

При выборе из конечной совокупности вероятность успеха не остаётся постоянной. Она меняется в зависимости от результатов предыдущих извлечений. Так, если вероятность при первом извлечении выбрать объект со свойством A равна $\frac{M}{N}$, то при втором она равна либо $\frac{M}{N-1}$, либо $\frac{M-1}{N-1}$ в зависимости от результата первого выбора и т. д. Поэтому, строго говоря, случайный выбор из конечной совокупности не является серией испытаний Бернулли.

Однако если числа M и N велики, то все упомянутые вероятности успехов мало отличаются друг от друга. Значит, если объём выборки мал по сравнению с численностью генеральной совокупности, то случайный выбор мало отличается от серии испытаний Бернулли. Поэтому схему Бернулли можно применять для приблизительных расчётов при случайном выборе.

Удивительным и важным фактом здесь является то, что ***необходимый объём выборки n не зависит от размера генеральной совокупности.*** Ошибочны мнения, что объём выборки должен быть как-то пропорционален объёму генеральной совокупности. Такой зависимости нет. Объём выборки зависит только от нужной точности измерения вероятности. Не забудем, что всё сказанное относится к большим генеральным совокупностям!

В социологических обследованиях генеральные совокупности состоят из сотен тысяч или миллионов объектов. Выборки объёмом полторы — две тысячи человек дают вполне приемлемую точность оценки.

Пример 2. Пусть нужно определить вероятность некоторого признака в большой совокупности людей, скажем вероятность p того, что взрослый городской житель в России имеет личный автомобиль. Допустимое отклонение пусть будет 0,03. Вероятность ошибки (то есть вероятность того, что сделанная оценка будет отличаться от истинного значения больше чем на 0,03) не должна превосходить 0,05.

Условия требуют указать такое n, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S}{n}-p\right|<0{,}03\right)>1-0{,}05=0{,}95.$$

Мы уже говорили, что подобные вопросы (о точности статистических оценок) не рассматриваются в этой книге. Но результат расчёта, то есть ответ на поставленный вопрос, привести можно.

Оказывается, n должно быть не меньше чем 1070. Следовательно, достаточно составить случайную выборку из 1100—1200 взрослых российских горожан, чтобы с нужной точностью определить долю автовладельцев среди горожан России. Примечательно при этом, что объём выборки не зависит от численности генеральной совокупности, в данном случае от численности городского населения.

Глава XI

Непрерывные случайные величины

До сих пор мы обсуждали случайные эксперименты, в которых множества событий дискретны. В таких экспериментах можно назначить вероятность каждому элементарному событию. Тогда вероятность любого события равна сумме вероятностей элементарных событий, которые составляют это событие.

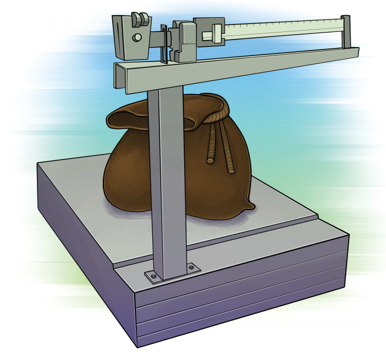
В этой главе речь пойдёт о случайных экспериментах с непрерывными множествами элементарных событий.

§ 24. Понятие непрерывной случайной величины

24.1. Непрерывные множества элементарных событий

Начнём обсуждение с конкретного случайного эксперимента. Рассмотрим измерение температуры тела медицинским термометром. Показание термометра, которое мы получим в результате, — это элементарный исход нашего опыта. Столбик ртути остановится в каком-то месте. Результатом будет число из некоторого промежутка. Если температура в дальнейшем изменится, то показания термометра тоже будут меняться, плавно проходя все промежуточные значения. Таким образом, получается случайная величина, значения которой меняются на некотором промежутке, например на отрезке от 34 до 42, если термометр проградуирован в градусах Цельсия.

Рассмотрим другой опыт — взвешивание предметов на механических весах.

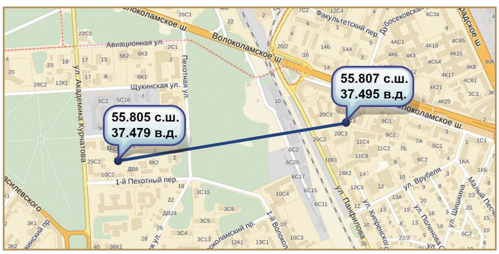


Когда весы уравновесятся, риска на подвижной гире укажет вес груза.

И здесь результат выражается числом. Можно считать, что при выбранной единице измерения значения случайной величины «масса предмета» в этом опыте образуют числовой луч $[0; +\infty)$.

Иногда значения случайной величины получаются как прямой результат измерения — как в приведённых примерах. Иногда случайная величина получается в результате опыта более сложным способом. Например, по широте и долготе двух случайных точек на поверхности Земли можно вычислить расстояние между ними. Но здесь нам недостаточно непосредственных измерений. Требуются ещё и вычисления.

Общее во всех трёх примерах то, что рассмотренные случайные величины не являются дискретными — множества их значений состоят не из отдельных чисел, а образуют промежутки.



У ***непрерывной случайной величины*** множество значений — один или несколько промежутков на числовой прямой.

24.2. Функция плотности вероятности случайной величины

Единичная вероятность распределяется между значениями случайной величины. Но распределение вероятности в непрерывных множествах происходит иначе, чем в дискретных. В дискретном случае вероятность между значениями случайной величины распределяется конечными порциями, дискретно. При непрерывном распределении вероятности отдельных чисел, как правило, равны нулю. Положительными вероятностями обладают не отдельные числа, а числовые промежутки.

Поэтому распределения непрерывных случайных величин приходится описывать специальным образом — ни таблицы, ни диаграммы для этого не годятся.

Чтобы описать распределение вероятностей непрерывной случайной величины на числовой прямой, нужна функция, которая определена на множестве значений этой случайной величины.

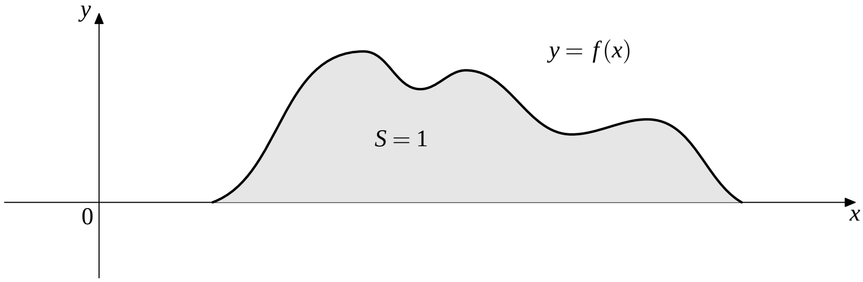


Рис. 42. Пример функции плотности

Одна из таких функций — ***функция плотности вероятности***.

Пусть X — случайная величина, $[a; b]$ — отрезок числовой прямой, а событие $a \leqslant X \leqslant b$ имеет вероятность $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$. Можно говорить просто: вероятность отрезка $[a; b]$.

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет двум условиям.

1°. Функция неотрицательна: $f(x) \geqslant 0$ для всех x.

2°. Площадь фигуры, заключённой между графиком функции $y = f(x)$ и осью абсцисс, равна 1.

Если функция удовлетворяет условиям 1 и 2, то эта функция является функцией плотности вероятности некоторой случайной величины X. При этом для любого отрезка $[a; b]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и осью абсцисс на отрезке $[a; b]$, равна $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$ (см. рис. 43).

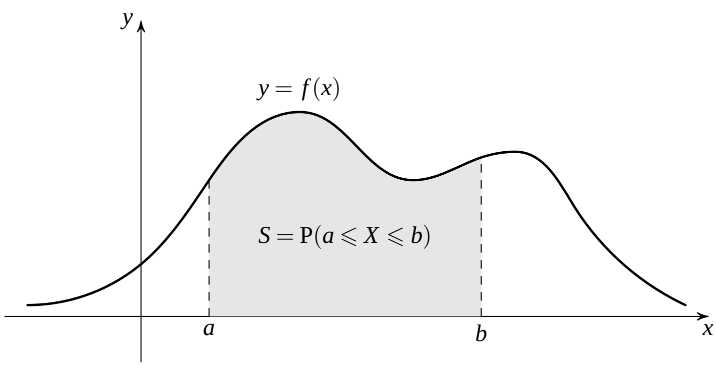


Рис. 43

Заметим, что функцию плотности можно определить на всей числовой прямой, даже если область значений случайной величины значительно меньше. На тех промежутках, которые не попадают в множество значений случайной величины, функция плотности равна нулю.

Случайная величина и соответствующая ей функция плотности могут быть устроены очень сложно. Более того, для многих непрерывных случайных величин функцию плотности вообще не удаётся построить. Но в практических задачах чаще всего встречаются случайные величины, для которых функция плотности непрерывна или имеет конечное число точек разрыва.

§ 25. Равномерное распределение

В практических задачах встречается не так много типов распределений. Далее мы будем говорить о некоторых из них и об их плотностях. Простейший пример — ***равномерное распределение***.

Пусть $[a; b]$ — произвольный отрезок числовой прямой. Плотность вероятности $f(x)$ определим на всей числовой прямой.

Вне отрезка $[a; b]$ положим $f(x) = 0$.

На отрезке $[a; b]$ положим $f(x) = c$ (c — постоянное число).

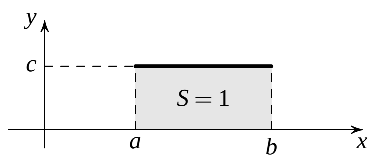


Рис. 44. График равномерного распределения на отрезке $[a; b]$

Значение c найдём, зная, что площадь под графиком функции $y = f(x)$ должна быть равна 1. Эта площадь равна площади прямоугольника со сторонами $b - a$ и c. Получаем $c \cdot (b - a) = 1$, откуда $c = \dfrac{1}{b - a}$.

Следовательно, функцию плотности равномерно распределённой на отрезке $[a; b]$ случайной величины можно задать выражением

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a, \\ \dfrac{1}{b - a}, & \text{если } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание[1] равномерно распределённой на отрезке $[a; b]$ случайной величины равно $\frac{a+b}{2}$, то есть оно находится посередине отрезка значений.

Пример 1. Если по какой-то причине механические часы остановились, то можно считать, что угол между минутной и часовой стрелками — случайная величина, которая распределена равномерно на отрезке $[0°; 180°]$.

Найдём вероятность того, что в момент остановки минутная стрелка будет отстоять от часовой не более чем на $5°$ в ту или иную сторону.

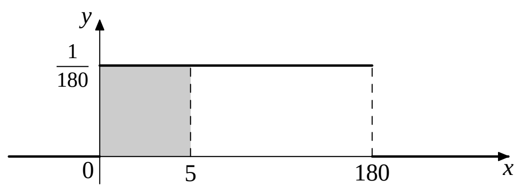


Рис. 45

Решение. Обозначим угол между стрелками X. Это случайная величина. График функции плотности изображён на рисунке.

Имеем

$$\mathrm{P}(0° \leqslant X \leqslant 5°) = \frac{5-0}{180-0} = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278.$$

Пример 2. Случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[1; 4]$. Найдём вероятность события $\frac{1}{2} \leqslant Y \leqslant 3$.

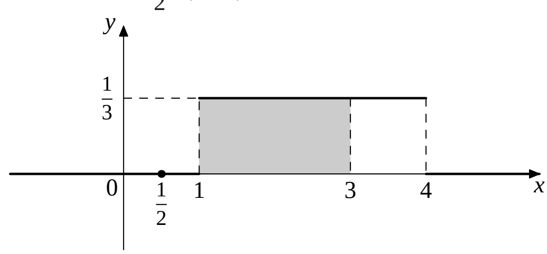


Рис. 46

[1] Математическое ожидание непрерывной случайной величины можно определить. Но вместо суммирования приходится пользоваться интегрированием, поскольку непрерывная случайная величина имеет бесконечное множество значений. При этом смысл математического ожидания в непрерывном случае такой же: теоретическое среднее значение случайной величины.

Решение. Построим график функции плотности распределения случайной величины Y (рис. 46).

Отрезок $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ пересекается с отрезком $[1; 4]$. Общая часть отрезков выделена на рисунке. Площадь выделенной фигуры равна $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

25.1. Вычисления с округлением

На практике вычисления обычно проводят приближённо. При округлении возникают ошибки. Эти ошибки случайны и распределены равномерно. Отрезок распределения зависит от выбранного правила округления.

Пусть, например, мы ведём вычисления с двумя знаками после запятой. Если мы просто отбрасываем знаки начиная с третьего, то есть не учитываем дальнейшие знаки, то получаем ошибку — случайную величину, равномерно распределённую на отрезке $[0; 0{,}01]$.

Если мы решили округлять до сотых к ближайшему числу, то ошибка будет распределена равномерно на отрезке $[-0{,}005; 0{,}005]$. При таком способе ошибки в цепочке последовательных округлений накапливаются медленнее: если сделано n округлений, то суммарная ошибка будет, скорее всего, пропорциональна не n, а $\sqrt{n}$.

Упражнения

422. Постройте график функции плотности равномерного распределения на отрезке $[-2; 2]$.

423. Дана случайная величина X, равномерно распределённая на отрезке $[5; 9]$. Найдите вероятность:

а) события $2 \leqslant X < 7$;

б) события $4{,}5 < X \leqslant 12{,}5$;

в) события, состоящего в том, что X отклоняется от $\mathrm{E}X$ не более чем на 1;

г) события, состоящего в том, что X отклоняется от $\mathrm{E}X$ более чем на 0,5.

424. Механические часы положили в шкаф, и через несколько дней они остановились. Найдите вероятность того, что часовая стрелка находится между 4 и 6 часами.

425. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0; 1]$. Найдите вероятность того, что X примет значение из отрезка:

а) $[0{,}5; 0{,}8]$; б) $[0{,}1; 0{,}4]$; в) $[-0{,}2; 0{,}5]$; г) $[0{,}8; 1{,}5]$.

Глава XII

Нормальное распределение

§ 26. Понятие о нормальном распределении

Есть несколько особенно важных типов непрерывных распределений и, соответственно, случайных величин, следующих этим распределениям.

Мы расскажем о двух семействах непрерывных распределений: нормальном и показательном. Эти распределения описывают случайную изменчивость в ряде природных явлений.

Само название «нормальное распределение» говорит, что этот тип случайной изменчивости встречается часто, что он в некотором смысле составляет норму. В природе это изменчивость однородных объектов: размеров животных или растений одного вида (или их органов), размеров или иных характеристик массовой продукции, результатов повторных измерений приборами той или иной величины и т. п.

Пусть X — случайная величина, распределённая по нормальному закону. Эта случайная величина имеет математическое ожидание и дисперсию. Традиционное обозначение для них: $a = \mathrm{E}X$ и $\sigma^2 = \mathrm{D}X$. Читается: «сигма квадрат», сигма — буква греческого алфавита. Параметры a и σ^2 вместе определяют конкретное нормальное распределение. Для его обозначения принято сокращение $N(a, \sigma^2)$.

На рис. 47 показано несколько графиков плотности нормального распределения для различных значений параметров.

Вместе с дисперсией σ^2 часто приходится пользоваться стандартным отклонением нормального распределения $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

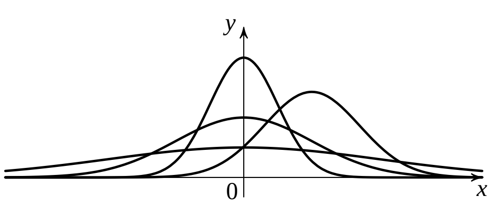


Рис. 47

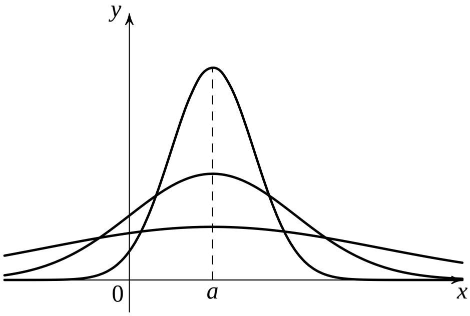


Рис. 48

Параметр a определяет положение (центр) нормального распределения на числовой оси. Стандартное отклонение σ задаёт масштаб нормального распределения — чем меньше σ, тем сильнее вероятность концентрируется вблизи a. Это видно на графиках плотности: при больших σ кривая более пологая, чем при малых (см. рис. 48).

26.1. Функция плотности стандартного нормального распределения

Стандартное нормальное распределение $N(0,1)$ имеет параметры $a = 0$, $\sigma^2 = 1$.

Случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение, обозначим буквой Z. Запись $Z \sim N(0,1)$ подразумевает, что случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение, и подчёркивает, что

$$\mathrm{E}Z = 0, \quad \mathrm{D}Z = 1.$$

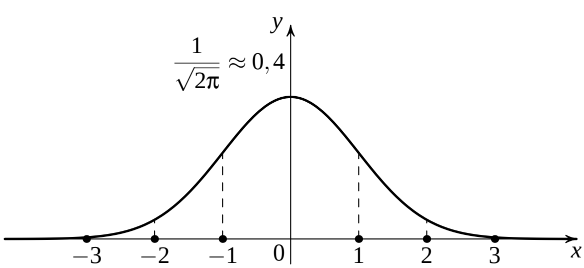


Рис. 49. Функция плотности стандартного нормального распределения

Функция плотности стандартного нормального распределения:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Заметим, что эта функция чётная, поэтому её график симметричен относительно оси y (см. рис. 49).

Нормальное распределение часто называют распределением Гаусса[1].

Карл Фридрих Гаусс

Приглашаем вас задуматься: разве не удивительно, что для описания природного явления, каким, несомненно, является нормальное распределение, нашлась краткая математическая формула, в которой участвуют разные по своей природе числа π и e.

Вычислить $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ по данному x трудно. Делать это нет необходимости, ибо такие вычисления уже проделаны. Их результаты сведены в специальные таблицы.

Пусть Z — случайная величина, распределённая по стандартному нормальному закону. Вероятность события

$$a \leqslant Z \leqslant b$$

— это вероятность того, что значение Z принадлежит отрезку $[a; b]$. По свойству плотности эта вероятность равна площади криволинейной трапеции, выделенной на рис. 50.

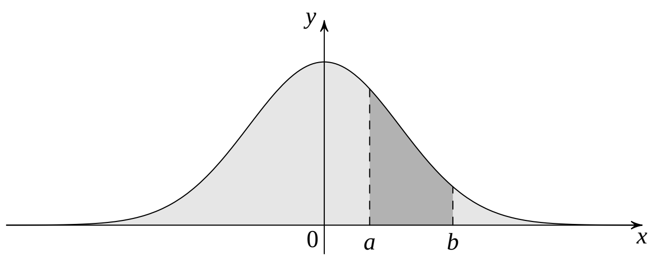


Рис. 50. Площадь выделенной фигуры равна вероятности отрезка $\mathrm{P}(a \leqslant Z \leqslant b)$

[1] Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) не открыл нормальное распределение, но исследовал его и приложения в природе настолько подробно, что не только само распределение называют гауссовым, но и функцию его плотности называют гауссовой кривой, а иногда — просто гауссианой.

Вычислить эту площадь также непросто, но и это делать нам не нужно. Мы воспользуемся готовыми результатами вычислений, представленными в таблицах. Расскажем об этом.

26.2. Функция стандартного нормального распределения

Каждому числу x поставим в соответствие площадь под графиком стандартной нормальной плотности, которая расположена левее числа x (см. рис. 51).

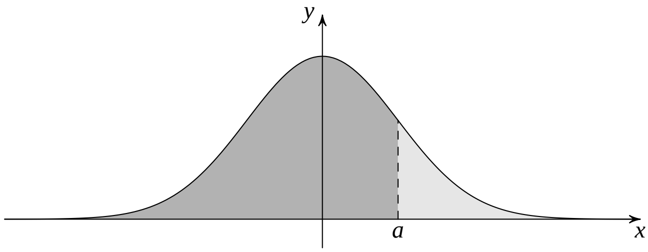


Рис. 51. Площадь выделенной фигуры равна $\Phi(x)$

Эта площадь зависит от x и поэтому является функцией аргумента x. Традиционно эту функцию обозначают $\Phi(x)$ (читается «фи от икс»). Функция $y = \Phi(x)$ монотонно возрастает (см. рис. 52).

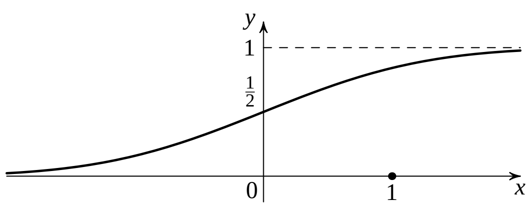


Рис. 52. График функции $y = \Phi(x)$

Для всякого x имеем $0 < \Phi(x) < 1$. С ростом x функция $\Phi(x)$ стремится к 1. При убывании x функция $\Phi(x)$ стремится к 0.

Это видно на рисунке: при больших x график функции $y = \Phi(x)$ практически сливается с прямой $y = 1$, а при малых x — с осью абсцисс $y = 0$.

График функции $y = \Phi(x)$ пересекает ось ординат в точке $\left(0; \frac{1}{2}\right)$, потому что $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

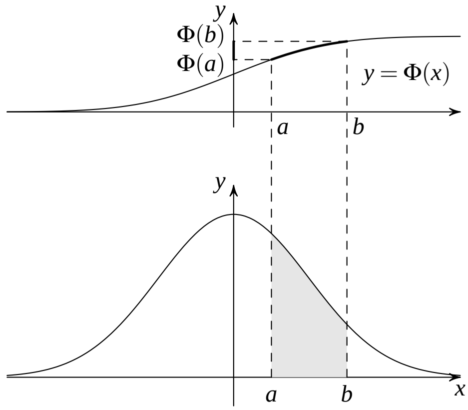


Рис. 53. Площадь выделенной фигуры $S = \Phi(b) - \Phi(a)$

Функцию $y = \Phi(x)$ называют функцией стандартного нормального распределения[1]. Для неё составлены таблицы. Небольшую таблицу этой функции мы приводим в конце книги (см. с. 200).

С помощью функции $y = \Phi(x)$ можно вычислять вероятности событий $a \leqslant Z \leqslant b$:

$$\mathrm{P}(a \leqslant Z \leqslant b) = \mathrm{P}(Z \leqslant b) - \mathrm{P}(Z < a).$$

Вероятность события $Z = a$ равна нулю, поэтому вероятности событий $Z < a$ и $Z \leqslant a$ совпадают. Получаем

$$\mathrm{P}(a \leqslant Z \leqslant b) = \mathrm{P}(Z \leqslant b) - \mathrm{P}(Z \leqslant a) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Теперь мы можем сказать, что

$$\mathrm{P}(a \leqslant Z \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Пример 1. Найдём вероятность того, что случайная величина Z, распределённая по стандартному нормальному закону, примет значение из отрезка $[0{,}3; 0{,}7]$, то есть $0{,}3 \leqslant Z \leqslant 0{,}7$.

Решение. Имеем

$$\mathrm{P}(0{,}3 \leqslant Z \leqslant 0{,}7) = \Phi(0{,}7) - \Phi(0{,}3) = 0{,}7580 - 0{,}6179 = 0{,}1401.$$

[1] Обратите внимание — это не функция плотности, а функция распределения. На самом деле обе функции связаны — функция плотности является производной функции распределения: $\Phi'(x) = f(x)$.

Упражнения

426. Случайная величина Z распределена по стандартному нормальному закону: $Z \sim N(0, 1)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$ (см. с. 200), найдите приближённую вероятность события[1]:

а) $-2 \leqslant Z \leqslant 2$; б) $-1 \leqslant Z \leqslant 1$; в) $-3 \leqslant Z \leqslant 3$; г) $0 \leqslant Z \leqslant 2$.

427. Случайная величина Z распределена по стандартному нормальному закону: $Z \sim N(0, 1)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите приближённую вероятность события:

а) $1{,}2 \leqslant Z \leqslant 1{,}8$; б) $-0{,}8 \leqslant Z \leqslant 1{,}3$; в) $-2{,}3 \leqslant Z \leqslant -1{,}9$; г) $0 \leqslant Z \leqslant 2{,}8$.

428. Случайная величина Z распределена по стандартному нормальному закону: $Z \sim N(0, 1)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите приближённо вероятность события:

а) $1{,}25 \leqslant Z \leqslant 1{,}3$; б) $-0{,}75 \leqslant Z \leqslant -0{,}45$;

в) $-1{,}35 \leqslant Z \leqslant 2{,}15$; г) $-1{,}24 \leqslant Z \leqslant 0$.

429. Случайная величина Z распределена по стандартному нормальному закону: $Z \sim N(0, 1)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите вероятность события:

а) $Z \geqslant 1$; б) $Z \leqslant -0{,}3$; в) $Z \geqslant 0{,}4$; г) $Z \leqslant 0{,}15$.

430. Случайная величина Z распределена по стандартному нормальному закону: $Z \sim N(0, 1)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите вероятность события:

а) $Z \leqslant 2$; б) $Z \leqslant -1$;

в) $Z \geqslant -0{,}25$; г) $Z \geqslant 1{,}35$.

431. Случайная величина Z распределена по стандартному нормальному закону: $Z \sim N(0, 1)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите вероятность события:

а) $Z \leqslant -1$ или $Z \geqslant 1$; б) $Z \leqslant -2$ или $Z \geqslant 2$;

в) $|Z| \geqslant 3$; г) $|Z| \leqslant 2{,}55$.

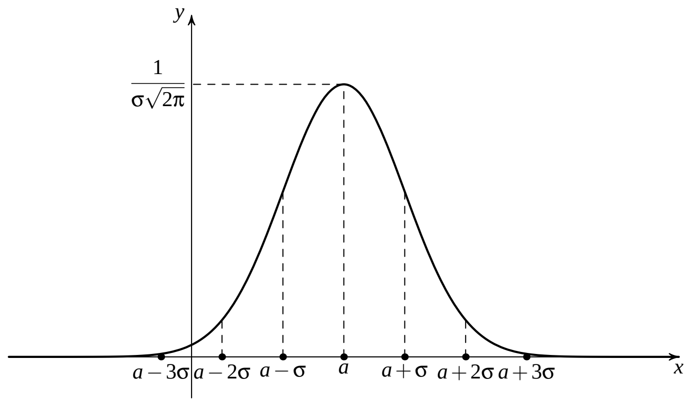
26.3. Общее нормальное распределение

Функция плотности нормально распределённой случайной величины X со средним значением $a = \mathrm{E}X$ и дисперсией $\sigma^2 = \mathrm{D}X$ даётся формулой

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Формула выглядит более сложно, чем формула стандартной нормальной плотности. Но это не страшно, поскольку случайную величину X, распределённую

[1] Примеры использования таблицы даны на с. 201.



по нормальному закону $N(a, \sigma^2)$, можно выразить через случайную величину Z, имеющую стандартное нормальное распределение: $X = a + \sigma Z$.

Вычислим, например, $\mathrm{P}(A \leqslant X \leqslant B)$.

Из равенства $X = a + \sigma Z$ получаем

$$\mathrm{P}(A \leqslant X \leqslant B) = \mathrm{P}(A \leqslant a + \sigma Z \leqslant B).$$

Преобразуем это неравенство, учитывая, что $\sigma > 0$:

$$\frac{A-a}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{B-a}{\sigma}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(A \leqslant X \leqslant B) = \mathrm{P}\left(\frac{A-a}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{B-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{B-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{A-a}{\sigma}\right).$$

Пример 2. Пусть случайная величина X распределена по закону $N(1{,}4)$. Найдём вероятность того, что $1{,}2 \leqslant X \leqslant 2{,}6$.

Решение. Параметры распределения: $a = 1$, $\sigma^2 = 4$. Это означает, что случайная величина

$$Z = \frac{X-a}{\sigma} = \frac{X-1}{2}$$

имеет стандартное нормальное распределение. Найдём границы соответствующего отрезка для Z.

$$\text{Левая граница: } \frac{1{,}2-1}{2} = 0{,}1. \quad \text{Правая граница: } \frac{2{,}6-1}{2} = 0{,}8.$$

Следовательно, нужно найти вероятность того, что $0{,}1 \leqslant Z \leqslant 0{,}8$:

$$\mathrm{P}(1{,}2 \leqslant X \leqslant 2{,}6) = \mathrm{P}(0{,}1 \leqslant Z \leqslant 0{,}8).$$

Эту вероятность ищем с помощью таблицы (с. 200):

$$\Phi(0{,}8) - \Phi(0{,}1) = 0{,}7881 - 0{,}5398 = 0{,}2483.$$

Упражнения

432. Случайная величина X распределена по нормальному закону: $X \sim N(1, 4)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите вероятность события:

а) $-2 \leqslant X \leqslant 2$; б) $-3 \leqslant X \leqslant 1$; в) $1{,}8 \leqslant X \leqslant 3{,}4$; г) $-0{,}4 \leqslant X \leqslant 4$.

433. Случайная величина X распределена по нормальному закону: $X \sim N(-3, 9)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите вероятность события:

а) $X \geqslant 3$; б) $-1{,}2 \leqslant X \leqslant -0{,}6$; в) $-2{,}7 \leqslant X \leqslant -0{,}9$; г) $X \leqslant 0{,}3$.

434. Случайная величина X распределена по нормальному закону: $X \sim N(2, 1)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите вероятность события:

а) $X \leqslant 2$; б) $X \leqslant -1$; в) $1{,}1 \leqslant X \leqslant 3{,}4$; г) $-0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}6$.

435. Случайная величина X распределена по нормальному закону: $X \sim N(0{,}5; 4)$. Пользуясь таблицей функции $\Phi(x)$, найдите вероятность события.

а) $X \leqslant 1{,}5$; б) $X \geqslant 2{,}5$; в) $1{,}3 \leqslant X < 3{,}5$; г) $|X| \geqslant 1{,}7$.

Пример 3. На упаковке шоколадного батончика написано: масса 50 г. В действительности масса батончика — случайная величина. Предположим, что она подчиняется нормальному закону распределения $N(50; 1{,}44)$. Найдём вероятность того, что масса случайно выбранного батончика:

а) меньше чем 48,8 г; б) не меньше чем 49,3 г;

в) находится в пределах от 49,2 до 50,4 г.

Решение. Обозначим массу батончика X. Параметры распределения этой случайной величины известны: $a = 50$, $\sigma^2 = 1{,}44$. Это значит, что случайная величина

$$Z = \frac{X - a}{\sigma} = \frac{X - 50}{1{,}2}$$

имеет стандартное нормальное распределение.

а) Если $X < 48{,}8$, то $Z < \dfrac{48{,}8 - 50}{1{,}2} = -1$. С помощью таблицы функции стандартного нормального распределения (с. 200) находим

$$\mathrm{P}(Z < -1) = \Phi(-1) = 0{,}1587.$$

б) Если $X \geqslant 49{,}3$, то $Z \geqslant \frac{49{,}3-50}{1{,}2} \approx -0{,}58$.

Нужно найти

$$P(Z \geqslant -0{,}58) = 1 - P(Z < -0{,}58) = 1 - \Phi(-0{,}58).$$

Значения $x = -0{,}58$ в таблице нет. Оно заключено между значениями $x = -0{,}6$ и $x = -0{,}5$. Значит,

$$\Phi(-0{,}6) < \Phi(-0{,}58) < \Phi(-0{,}5).$$

В таблице находим

$$\Phi(-0{,}6) = 0{,}2743 \quad \text{и} \quad \Phi(-0{,}5) = 0{,}3085.$$

Как видим, эти числа довольно близки — разность между ними около 0,03. Это наводит на мысль о том, что в качестве приближённого значения $\Phi(-0{,}58)$ можно взять любое число между $\Phi(-0{,}6)$ и $\Phi(-0{,}5)$, при этом потеря точности будет незначительной. Например, возьмём среднее арифметическое:

$$\Phi(-0{,}58) \approx \frac{\Phi(-0{,}6)+\Phi(-0{,}5)}{2} = \frac{0{,}2743+0{,}3085}{2} \approx 0{,}291.$$

Значит,

$$P(Z \geqslant -0{,}58) = 1 - \Phi(-0{,}58) \approx 1 - 0{,}291 = 0{,}709.$$

в) Если $49{,}2 \leqslant X \leqslant 50{,}4$ (можно поставить знаки строгих неравенств, это не влияет на решение), то

$$\frac{49{,}2-50}{1{,}2} \leqslant Z \leqslant \frac{50{,}4-50}{1{,}2},$$

откуда получаем приближённое неравенство $-0{,}67 \leqslant Z \leqslant 0{,}5$.

Нужно найти

$$\mathrm{P}(-0{,}67 \leqslant Z \leqslant 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}67).$$

Значение $\Phi(0{,}5) = 0{,}6915$ найдём непосредственно в таблице. А значение $\Phi(-0{,}67)$ снова найдём приближённо, используя ближайшие табличные значения:

$$\Phi(-0{,}67) \approx \frac{\Phi(-0{,}7)+\Phi(-0{,}6)}{2} = \frac{0{,}2420+0{,}2743}{2} \approx 0{,}2582.$$

Значит,

$$P(-0{,}67 \leqslant Z \leqslant 0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}67) \approx 0{,}6915 - 0{,}2582 = 0{,}4333.$$

26.4. Связь нормального и биномиального распределений

В некотором смысле нормальное распределение является универсальным. Во многих случаях распределение суммы случайных величин при большом числе слагаемых мало отличается от нормального распределения. При этом отличие становится тем меньше, чем больше число слагаемых.

Проиллюстрируем сказанное на примере распределения случайной величины S, равной числу успехов в серии из n испытаний Бернулли. Как мы знаем, эта величина получается суммированием успехов при отдельных испытаниях. Кроме того, известно, что S имеет биномиальное распределение:

$$\mathrm{P}(S = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Пусть $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$. При этих условиях $q = 1 - p = \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{E}S = np = 50, \quad \mathrm{D}S = npq = 25.$$

Построим диаграмму биномиального распределения и на том же рис. 54 — график функции плотности нормального распределения с параметрами

$$a = 50, \quad \sigma^2 = 25.$$

Достаточно изобразить центральную часть распределения, потому что для $S < 34$ и $S > 66$ вероятности настолько малы, что и столбики диаграммы, и график плотности нормального распределения практически сливаются с осью абсцисс. На рисунке видно, что уже для $n = 100$ функция плотности нормального распределения

$$y = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-50)^2}{50}}$$

очень мало отличается от соответствующих биномиальных вероятностей

$$\mathrm{P}(S = k) = \frac{C_{100}^k}{2^{100}}.$$

С ростом n отличие становится ещё меньше. Это свойство близости часто используется и в статистике, и в теории вероятностей — биномиальные вероятности вычисляются приближённо с помощью таблиц, составленных для нормального распределения.

26.5. Роль нормального распределения в измерениях

Нам часто приходится что-то измерять — температуру, массу, длину, время и т. п. Иногда измерения непосредственные — мы сравниваем измеряемую величи-

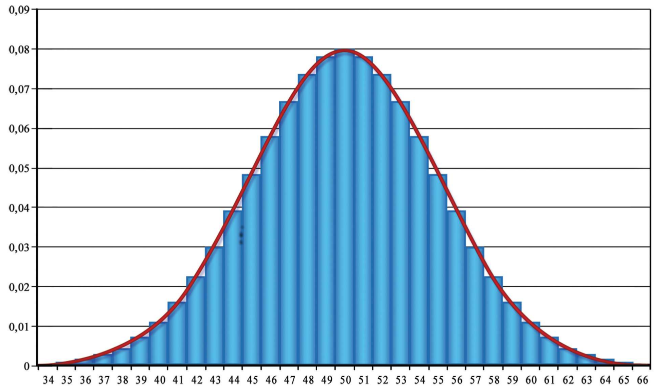


Рис. 54

ну с эталоном (линейкой, гирей и т. п.). Иногда измерения основаны на физических законах. Например, при измерении температуры воздуха мы пользуемся тепловым расширением спирта, залитого в градусник.

Практически любое измерение имеет погрешность, на которую влияет множество изменчивых факторов, часть из которых мы можем учесть, но не можем устранить.

Например, спирт в уличном термометре расширяется нелинейно — термометр по-разному реагирует на увеличение температуры на $1°C$ зимой и летом. Шкала устроена так, чтобы погрешность была наименьшей в диапазоне умеренных температур. Но при очень низких и очень высоких температурах погрешности выше. Поэтому зимой в Якутии погрешность термометра будет, скорее всего, выше, чем весной в Москве.

Другие факторы, влияющие на погрешность измерения, мы даже не можем учесть и зачастую не подозреваем об их существовании.

Рассмотрим результат измерения как непрерывную случайную величину. Если измерение не имеет ***систематической ошибки***[1], то математическое ожидание измерения равно истинному значению измеряемой величины.

Погрешность измерения также непрерывная случайная величина. Если нет систематической ошибки, то математическое ожидание погрешности равно нулю, а её

[1] Систематическая ошибка — ошибка, вызванная неизменным фактором, чаще всего — неверными настройками прибора. Например, если весы настроены так, чтобы показывать на 50 граммов больше истинного веса, то эти 50 граммов — систематическая ошибка весов.

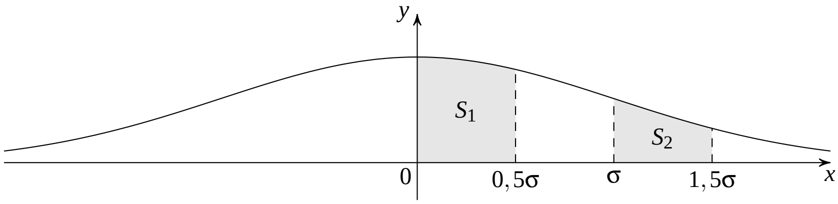


Рис. 55

дисперсия зависит от природы измерения и точности инструментов. Усреднение нескольких измерений, как мы знаем, обычно уменьшает дисперсию. На этом основан метод повторных измерений, однако и он не даёт полной уверенности в точности измерения.

Если погрешности не удаётся устранить, то нужно найти способ их оценивать. Оказывается, во многих случаях, если измерения проведены качественно[1], случайная величина «погрешность измерения» имеет нормальное распределение. Это верно и для отдельных измерений, но наилучшее согласие с нормальным распределением наблюдается для результатов усреднённых измерений.

В результате мы получаем важный вывод: малые погрешности более вероятны, чем большие. Эту мысль следует выразить точнее. Возьмём промежуток определённой длины. Чем дальше он от центра распределения, тем менее вероятно, что погрешность окажется в этом промежутке.

Это хорошо видно на графике плотности нормального распределения (см. рис. 55). Предположим, что случайная величина X, равная погрешности некоторого измерения, имеет распределение $N(0, \sigma^2)$. Вероятность того, что ошибка окажется в пределах от 0 до 0,5σ, равна площади S_1. Вероятность того, что ошибка окажется в пределах от σ до 1,5σ, равна площади S_2.

Расчёт показывает, что

$$S_1 = \mathrm{P}(0 \leqslant X \leqslant 0{,}5\sigma) = \Phi(0{,}5) - \Phi(0) = 0{,}192,$$
$$S_2 = \mathrm{P}(\sigma \leqslant X \leqslant 1{,}5\sigma) = \Phi(1{,}5) - \Phi(1) = 0{,}092.$$

Таким образом, погрешность, не превосходящая половины σ, гораздо более вероятна, чем погрешность в одно — полтора σ.

[1] Без грубых ошибок, связанных с неумением пользоваться измерительным прибором, неисправностью этого прибора и т. п.

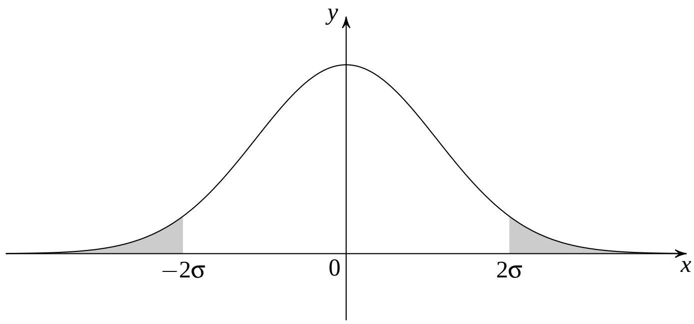


Рис. 56. Площадь заштрихованной фигуры (слева от -2σ и справа от 2σ) составляет менее 4,6% общей площади фигуры, ограниченной графиком плотности нормального распределения

Эти расчёты наводят на мысль о том, что стандартное отклонение σ удобно использовать как меру погрешности измерений.

С другой стороны, не бывает случаев, чтобы нам требовалось абсолютно точное значение непрерывной величины. Всегда есть какой-то ***допуск*** — допустимая погрешность измерения или изготовления. Например, диаметр автомобильных подшипников может отличаться от заданной величины на 0,01 мм в ту или иную сторону. При измерении температуры воздуха или воды нам обычно достаточно точности $1^\circ C$, а при измерении температуры тела — $0{,}1^\circ C$.

Погрешность в пределах допуска нас устраивает. Совсем исключить большие погрешности не удаётся. Значит, нужно добиться того, чтобы событие «погрешность превышает допуск» было маловероятным.

Обозначим допуск d. В большинстве измерений достаточно, чтобы выполнялось неравенство $2\sigma < d$. Тогда погрешность будет меньше допустимой с вероятностью более чем

$$\mathrm{P}(-2\sigma \leqslant X \leqslant 2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}9544.$$

Иными словами, доля измерений с недопустимо большой погрешностью окажется менее 4,6% (рис. 56).

В особо ответственных случаях нужно, чтобы выполнялось более сильное неравенство, например $2{,}5\sigma < d$ или $3\sigma < d$. Если усреднением, совершенствованием приборов и методов удаётся добиться того, что $3\sigma < d$, то доля «плохих» измерений оказывается меньше чем 0,27%. С такой малой вероятностью обычно мирятся даже в самых ответственных случаях (рис. 57).

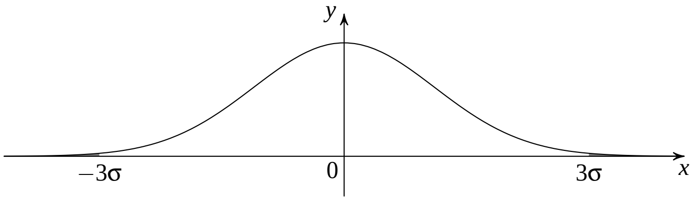


Рис. 57. Заштрихованную фигуру (слева от -3σ и справа от 3σ) почти не видно — её площадь менее 0,0027 — менее 0,27% общей площади

Значительное увеличение точности измерений — трудное и дорогое дело. Поэтому в каждом конкретном случае инженеры ищут компромиссное решение, стараясь обеспечить необходимую точность при приемлемой стоимости измерений.

26.6. Роль нормального распределения в выборочных исследованиях. Выборка и гистограмма

Мы неоднократно обсуждали выборки. Напомним, в чём обычно состоит задача. Имеется генеральная совокупность объектов (людей, предметов, явлений). Суть исследования обычно сводится к определению свойств этой совокупности. Иногда можно свести задачу к исследованию свойств некоторой случайной величины, связанной с генеральной совокупностью. Например, нас может интересовать распределение роста людей определённого возраста, пола, этнической группы и т. п.

В этой задаче генеральная совокупность — множество всех людей, входящих в целевую группу исследования, изучаемая случайная величина — «рост».

Обычно невозможно исследовать всю генеральную совокупность из-за её многочисленности. Тогда используется выборочное обследование. Из генеральной совокупности выбирается группа объектов достаточно большой численности — выборка — и на основе свойств выборки делается заключение о свойствах всей генеральной совокупности.

Чтобы судить о плотности распределения изучаемой случайной величины, строится ***гистограмма*** — диаграмма, отражающая частоты отдельных значений или их групп (ведь каждое отдельное значение может иметь нулевую вероятность). Таким образом, при построении гистограммы данные часто приходится предварительно группировать.

Гистограммы можно строить по-разному. Мы опишем способ, при котором частота изображается площадью столбиковой диаграммы.

Мы собрали данные о росте 1000 женщин в возрасте от 25 до 45 лет, уроженок европейской части Российской Федерации. Измерения проводили в сантиметрах. Наименьшее значение 152,2 см, наибольшее — 178,2 см. Среднее значение 165,02 см. Дисперсия равна 21,58. Чтобы сделать данные более наглядными, мы сгруппировали их в интервалы по 2 сантиметра: 150—152, 152—154 и т. д. Получилась таблица.

Интервалы группировки	Число данных, попавших в интервал	Частота (площадь столбика гистограммы)	Высота столбика гистограммы
150—152	0	0	0
152—154	8	0,008	0,004
154—156	14	0,014	0,007
156—158	37	0,037	0,0185
158—160	88	0,088	0,044
160—162	116	0,116	0,058
162—164	158	0,158	0,079
164—166	167	0,167	0,0835
166—168	159	0,159	0,0795
168—170	114	0,114	0,057
170—172	62	0,062	0,031
172—174	50	0,05	0,025
174—176	15	0,015	0,0075
176—178	10	0,01	0,005
178—180	2	0,002	0,001
180—182	0	0	0

Чтобы получить площадь каждого столбика гистограммы, мы нашли частоту попадания данных в интервал, поделив данные второго столбца таблицы на 1000. Таким образом, площадь каждого столбика равна частоте попадания данных в соответствующий интервал. Чтобы получить высоту столбика, нужно площадь разделить на длину интервала группировки, то есть в нашем случае на 2.

Например, площадь столбика, построенного на интервале 154—156 см, равна $14 : 1000 = 0{,}014$. Высота этого столбика равна $0{,}014 : 2 = 0{,}007$. Осталось построить гистограмму (см. рис. 58).

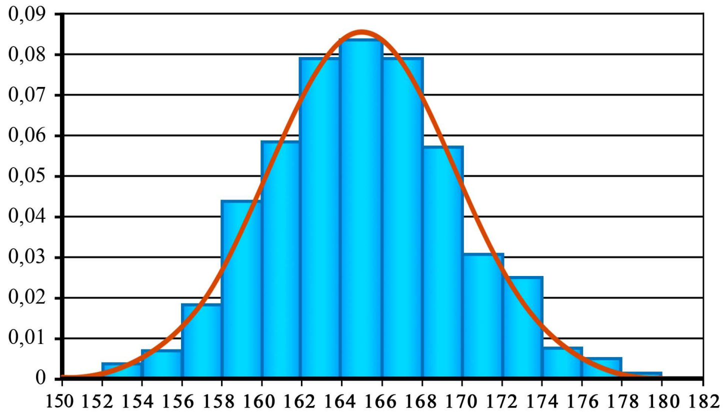


Рис. 58

Заметим, что гистограмма представляет частоты площадями столбиков, поэтому зазоры между столбиками отсутствуют — основание каждого столбика равно длине интервала группировки.

Как именно выбирать интервалы группировки? Это зависит от природы изучаемых данных. Единого рецепта дать нельзя. Чаще всего приходится экспериментировать, добиваясь того, чтобы построенная гистограмма наилучшим образом отражала нужные нам свойства.

26.7. Связь нормального распределения с построенной гистограммой

В самом начале рассказа о нормальном распределении мы говорили, что многие природные случайные величины подчиняются нормальному распределению. Как это понимать?

Известно, что случайная величина «рост женщин», которую мы использовали при построении гистограммы, распределена очень близко к нормальному закону. Поэтому было бы разумным поискать связь между полученной гистограммой и графиком функции плотности нормального распределения.

На рис. 58 видно, что график функции плотности нормального распределения $N(165{,}02; 21{,}58)$ близок к ступенчатой линии, ограничивающей гистограмму сверху.

Так графически выражается тот факт, что случайная величина «рост женщин» (при указанных ограничениях) приблизительно подчиняется нормальному распределению, параметры которого мы, опять же приближённо, вычислили по сделанной выборке.

Таким же свойством обладают многие другие величины, которые встречаются в природе, технике, психологии, социологии и экономике.

Упражнения

436. Ошибка измерения X распределена по закону $N(0, \sigma^2)$. Пользуясь таблицей функции стандартного нормального распределения (с. 200), убедитесь в том, что $\mathrm{P}(-2\sigma \leqslant X \leqslant 2\sigma) = 0{,}9544$.

437. Ошибка измерения X распределена по закону $N(0, \sigma^2)$. Пользуясь таблицей функции стандартного нормального распределения, найдите вероятность того, что ошибка по модулю будет больше чем:

а) σ; б) 2σ; в) $1{,}5\sigma$; г) $2{,}5\sigma$; д) 3σ.

438. При фасовке творога автомат отмеряет порции по 180 г. Ошибка измерения имеет распределение $N(0, \sigma^2)$, где $\sigma = 2$ г. Допуск равен 5 г (в ту или иную сторону).

Найдите вероятность того, что случайно выбранная пачка творога:

а) имеет массу в пределах допуска;

б) имеет массу больше допустимой;

в) имеет массу меньше допустимой;

г) имеет массу в интервале от 179 до 181 г.

439. Диаметр стержня измеряют микрометром[1], не имеющим систематической ошибки. Точное значение диаметра 5,203 мм. Стандартная ошибка измерения 0,002 мм. Найдите вероятность того, что результат измерения окажется больше чем 5,207 мм.

440. Диаметр стержня клапана в некотором автомобильном двигателе должен равняться $5{,}2 \pm 0{,}005$ мм, иначе он непригоден. Диаметр нового стержня измерили микрометром, не имеющим систематической ошибки, и получили результат 5,203 мм. Стандартная ошибка измерения 0,002 мм. Найдите вероятность того, что новый стержень пригоден для использования.

[1] Высокоточный прибор для измерения размеров небольших деталей.

Глава XIII

Показательное распределение

§ 27. Время ожидания

Показательное распределение названо так потому, что в его описании участвует показательная функция $y = a^x$ $(a > 0)$. Случайная величина с показательным распределением нередко встречается в приложениях. В первую очередь — это время ожидания событий, которые могут произойти в любой момент.

В технике это время работы прибора до поломки (инженеры говорят — наработка на отказ).

В телефонии это продолжительность телефонных разговоров.

В биологии это время жизни организма в природе, где ему грозит гибель от несчастного случая или нападения хищника.

Предсказать эти величины нельзя, но можно описать их распределение вероятностей, если сделать важное предположение:

Время дальнейшего ожидания события не зависит от времени, уже прошедшего с начала эксперимента.

Вольно выражаясь, «прошлое не влияет на будущее, если известно настоящее». Такое предположение не всегда приемлемо. Это свойство иногда образно называют «эффект отсутствия старения» или «эффект отсутствия памяти» — эксперимент «не помнит, что было раньше».

27.1. Уравнение для времени ожидания

Мы описываем случайную величину T — продолжительность ожидания события. Для определённости пусть T — время безотказной работы некоторой машины. При этом мы считаем, что длительность времени, уже прошедшего в ожидании отказа, не влияет на длительность последующего ожидания, то есть имеется эффект отсутствия памяти — машина «не помнит», сколько уже прослужила, и в каждый момент как новая.

Выразим эту мысль математически и тогда найдём распределение случайной величины T.

Рассмотрим вероятность того, что машина проработает ещё время x, при условии, что она уже безотказно проработала до момента времени y. Это условная вероятность, и её можно записать как

$$\mathrm{P}(T \geqslant y+x | T \geqslant y).$$

Сделанное предположение об отсутствии памяти означает, что эта условная вероятность не зависит от y и поэтому равна $\mathrm{P}(T \geqslant x)$ — безусловной вероятности того, что машина проработает время x без поломок. Поэтому для всех $y \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ должно выполняться соотношение

$$\mathrm{P}(T \geqslant y+x | T \geqslant y) = \mathrm{P}(T \geqslant x).$$

Запишем левую часть с помощью формулы условной вероятности:

$$\frac{\mathrm{P}((T \geqslant y+x) \cap (T \geqslant y))}{\mathrm{P}(T \geqslant y)} = \mathrm{P}(T \geqslant x).$$

Время $y+x$ больше, чем время y. Значит, если машина проработала время $y+x$, то она и подавно проработала время y (см. рис. 59). Поэтому

$$(T \geqslant y+x) \cap (T \geqslant y) = (T \geqslant y+x).$$

Следовательно,

$$\frac{\mathrm{P}(T \geqslant y+x)}{\mathrm{P}(T \geqslant y)} = \mathrm{P}(T \geqslant x),$$

откуда

$$\mathrm{P}(T \geqslant y+x) = \mathrm{P}(T \geqslant y) \cdot \mathrm{P}(T \geqslant x).$$

Рассмотрим вероятность $\mathrm{P}(T \geqslant x)$ как функцию аргумента x: $g(x) = \mathrm{P}(T \geqslant x)$. Очевидно, чем больше время x, тем меньше вероятность безотказной работы. Поэтому функция $g(x) = \mathrm{P}(T \geqslant x)$ монотонно убывает при $x > 0$.

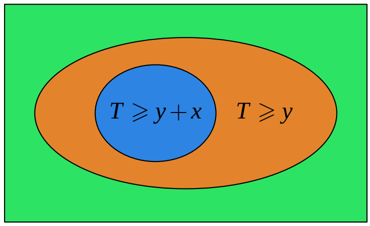


Рис. 59. Событие $T \geqslant y+x$ включается в событие $T \geqslant y$, а значит, их пересечение равно $T \geqslant y+x$

В новых обозначениях уравнение принимает вид

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y).$$

В технике функцию $g(x) = \mathrm{P}(T \geqslant x)$ часто называют ***функцией надёжности***, поскольку она равна вероятности того, что прибор прослужит не меньше чем время x, то есть выражает надёжность прибора.

27.2. Решение уравнения

Нужно найти функцию $g(t)$, удовлетворяющую условию

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$$

при всех $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Зная эту функцию, мы сможем построить плотность распределения. Единственная непрерывная функция, для которой это равенство верно при всех x и y, — показательная функция

$$g(x) = a^x,$$

где $a > 0$ — некоторое число, которое зависит от природы случайной величины[1].

В нашей задаче $g(x) = \mathrm{P}(T \geqslant x)$ — функция убывающая. Поэтому $0 < a < 1$.

Функцию $g(x)$ обычно записывают иначе. Перейдём к основанию e: $a = e^{\ln a}$ и положим $\theta = -\dfrac{1}{\ln a}$ (греческая буква θ читается «тэта»). Из условия $0 < a < 1$ следует, что $\ln a < 0$, поэтому $\theta > 0$.

[1] Доказательство того, что показательная функция $g(x) = a^x$ — единственное непрерывное решение уравнения $g(x+y) = g(x)g(y)$, технически довольно сложное. Вы можете попробовать доказать это, пользуясь тем, что функция $g(x)$ принимает только положительные значения, и дополнительно предполагая, что она дифференцируема на всей числовой прямой.

Тогда для всех $x \geqslant 0$ выполняется равенство

$$\mathrm{P}(T \geqslant x) = e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

Число θ называют ***параметром показательного распределения***. Если случайная величина T — время ожидания события, то θ — среднее время ожидания события, то есть $\mathrm{E}T = \theta$.

27.3. Плотность показательного распределения

Функцию плотности показательного распределения можно получить из найденной функции надёжности

$$g(x) = \mathrm{P}(T \geqslant x) = e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

Обозначим искомую функцию плотности $f(x)$. Выберем некоторое x и небольшое число $\Delta x > 0$. Площадь, заключённая под графиком этой функции на отрезке $[x; x+\Delta x]$, должна быть равна

$$S = \mathrm{P}(x \leqslant T \leqslant x+\Delta x) = \mathrm{P}(T \geqslant x) - \mathrm{P}(T \geqslant x+\Delta x) = g(x) - g(x+\Delta x).$$

Если Δx мало, то эта площадь приближённо равна площади прямоугольника со сторонами $f(x)$ и Δx: $S \approx f(x) \cdot \Delta x$.

Следовательно,

$$f(x) \cdot \Delta x \approx g(x) - g(x+\Delta x), \quad \text{откуда} \quad f(x) \approx -\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

При этом равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Устремим Δx к нулю. Тогда приближённое равенство станет точным, а выражение $\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$ устремится к производной функции $g(x)$: $f(x) = -g'(x)$. Следовательно,

$$f(x) = -\left(e^{-\frac{x}{\theta}}\right)' = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

Исключим промежуточные выкладки:

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

График функции плотности вероятности показательного распределения изображён на рис. 60.

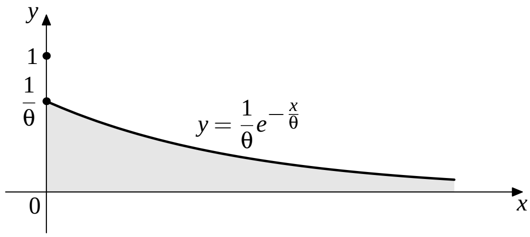


Рис. 60. Плотность показательного распределения

Часто время ожидания мы измеряем не непрерывно, а дискретно — с определённой точностью, округляя до минуты или до часа. В этом случае случайная величина «срок службы» дискретная и подчиняется геометрическому распределению (см. гл. VIII).

Можно сказать, что показательное распределение — это непрерывный аналог геометрического распределения. Или наоборот: геометрическое распределение — дискретный аналог показательного.

27.4. Замечания о старении и отсутствии старения

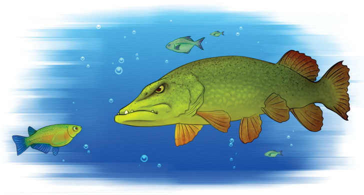
В начале рассказа о показательном распределении мы предположили, что обсуждаем некоторый механизм, у которого будущее время безотказной работы не зависит от уже истекшего срока, то есть имеет место так называемый эффект отсутствия старения. Без этого наши выкладки не получаются.

Очевидно, это предположение верно далеко не всегда — ведь свойства любого объекта с течением времени меняются — он стареет. По мере старения вероятность отказа увеличивается — и это несовместимо с предположением о том, что машина в каждый момент времени как новая.

После этих слов, казалось бы, следует усомниться в реалистичности описания процессов с помощью показательного распределения. Но на практике часто встречаются ситуации, когда случайные отказы наступают много раньше, чем начинает сказываться естественное старение. В этих случаях показательное распределение времени безотказной службы хорошо описывает реальность.

Например, интервалы между сбоями в работе компьютеров и других электронных устройств следуют показательному распределению, поскольку физическое старение электронных устройств оказывает очень малое влияние по сравнению с другими случайными факторами.

Срок жизни рыбы в естественных условиях большого водоёма — величина, распределённая по показательному закону, поскольку до зрелого возраста доживает ничтожно малое число особей, а абсолютное большинство погибает в результате встреч с хищниками.



27.5. Математическое ожидание и дисперсия показательного распределения

Теорема. Пусть случайная величина T распределена по показательному закону с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}.$$

Тогда $\mathrm{E}T = \theta$, $\mathrm{D}T = \theta^2$.

Таким образом, если случайная величина T — время ожидания события, то θ — среднее время ожидания события.

Эти факты мы приводим без доказательства, поскольку оно потребовало бы выхода за рамки школьного курса математического анализа.

Пример 1. Светодиод — осветительный прибор, практически не подверженный износу. Это означает, что время службы светодиода — случайная величина, распределение которой близко к показательному. На упаковке указан средний срок службы светодиода, например 10 000 часов.

Считая, что $\theta = 10\,000$, можно написать функцию плотности распределения срока службы: $f(x) = 10^{-4}e^{-10^{-4}x}$. Функция надёжности: $g(x) = e^{-10^4 x}$.

Найдём, например, вероятность того, что светодиод выйдет из строя в течение первых 2000 часов работы:

$$\mathrm{P}(T < 2000) = 1 - \mathrm{P}(T \geqslant 2000) = 1 - g(2000) = 1 - e^{-\frac{2000}{10\,000}} = 1 - e^{-0{,}2} \approx 0{,}181.$$

Как видим, это событие не такое уж маловероятное. В среднем 18 из 100 таких светодиодов проработают не дольше 2000 часов, хотя производитель указывает среднее время 10 000 часов — в 5 раз больше.

27.6. О старых и новых вещах

— Только купил телевизор... месяца не прошло, вы представляете? — сломался! Мастер приходил, говорит — они все ломаются. Старый телевизор на даче уже 30 лет работает — хоть бы что... Вот раньше вещи делали!..

Сколько раз мы слышали подобные суждения и жалобы от обладателей телевизоров, холодильников, мобильных телефонов и т. п. Конечно, раньше вещи делали лучше, спору нет. Но давайте немного разберёмся в вероятностной подоплёке явления.

В современном телевизоре нет трущихся деталей и нагревательных элементов. Поэтому старению он подвергается очень незначительно, и можно считать, что время его безотказной работы распределено близко к показательному закону. С помощью выборочного обследования можно оценить средний срок службы телевизоров определённой модели. Разумеется, такие исследования есть, и их результаты влияют на определение срока заводской гарантии.

Наработка на отказ у современных недорогих телевизоров в среднем 15—20 тысяч часов непрерывной работы (больше 10 лет при эксплуатации по 4 часа в день). Напомним, что средняя наработка на отказ — это и есть параметр θ показательного распределения случайной величины «срок безотказной службы».

Предположим для простоты, что для определённой модели телевизора средний срок службы $\theta = 10$ лет. Тогда вероятность того, что телевизор проработает не менее x лет, выражается функцией надёжности

$$g(x) = \mathrm{P}(T \geqslant x) = e^{-\frac{x}{10}}.$$

Найдём вероятность того, что телевизор выйдет из строя прежде, чем пройдёт 10 лет:

$$\mathrm{P}(T < 10) = 1 - \mathrm{P}(T \geqslant 10) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$$

Значит, примерно 63% новых телевизоров сломается прежде, чем пройдёт 10 лет. А теперь найдём вероятность того, что телевизор будет безотказно служить дольше 30 лет:

$$\mathrm{P}(T \geqslant 30) = e^{-3} \approx 0{,}05.$$

Через тридцать лет останется примерно 5% работающих телевизоров — таково свойство показательного распределения.

Таким образом, большинство телевизоров, купленных 30 лет назад, давно сломалось. Но примерно один из двадцати работает и сейчас. Наверное, как раз он и стоит на той самой даче.

А новый телевизор, скорее всего, сломается быстро — ведь функция надёжности $g(x) = e^{-\frac{x}{10}}$ принимает самые большие значения вблизи нуля. Именно это наблюдение и сделал опытный телевизионный мастер.

Свойства показательного распределения вступают в некоторое противоречие с нашим интуитивным представлением о том, что старые вещи менее надёжны, чем новые. В некоторых случаях это не так.

Упражнения

441. Рыбак, забросив удочку, в среднем ждёт поклёвки 4 минуты.

а) Напишите уравнение функции плотности для случайной величины «срок ожидания поклёвки в минутах».

б) Найдите вероятность того, что рыбак, забросив удочку, будет ждать поклёвки не менее 5 минут.

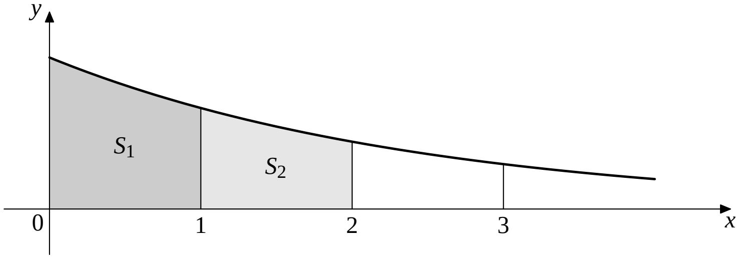
442. У просёлочной дороги уставший пешеход ожидает попутную машину. В среднем по дороге в нужном направлении проходит пять машин в час.

а) Напишите уравнение функции плотности для случайной величины «время ожидания попутного автомобиля (в минутах)».

б) Найдите вероятность того, что, пропустив одну попутку, пешеход будет ждать следующей не более 10 минут.

443. Василий Петрович хочет купить мобильный телефон. Он прочитал книжку по теории вероятностей и рассуждает:

— Посмотрим на плотность показательного распределения величины «срок службы телефона». Площадь S_1 равна вероятности того, что телефон выйдет из строя в течение первого года службы. Площадь S_2 — вероятность того, что он сломается в течение второго года, и т. д. Чем дальше, тем вероятность поломки меньше: $S_1 > S_2 > S_3 > \ldots$ Следовательно, с точки зрения надёжности лучше купить подержанный мобильный телефон и чем старше, тем лучше: вероятность поломки старого телефона в течение года меньше, чем у нового.



Объясните, прав ли Василий Петрович в своих рассуждениях, и если он ошибается, то в чём его ошибка.

Глава XIV

Линейная регрессия и выборочный коэффициент корреляции

§ 28. Совместные наблюдения двух величин и линейная регрессия

28.1. Диаграмма рассеивания

Мы уже знакомы с диаграммами рассеивания. Пусть имеются результаты наблюдений двух случайных величин в одном эксперименте.

Каждое из n сделанных наблюдений даёт нам значение x_j случайной величины X и значение y_j случайной величины Y, где j — номер наблюдения. Можно говорить о выборке из совместного распределения двух случайных величин X и Y. Каждый элемент выборки — пара $(x_j; y_j)$, где $j = 1, \ldots, n$.

Графически эта выборка изображается ***диаграммой рассеивания***, которая состоит из точек с координатами $(x_j; y_j)$.

Точки, когда их много, образуют нечто вроде созвездия или облака. Форма и положение облака позволяют делать предположения о наличии или отсутствии зависимости между наблюдаемыми величинами.

Центр диаграммы рассеивания — точка, координаты которой являются средними арифметическими значений x_j и y_j.

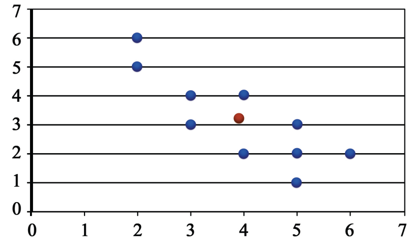


Рис. 61. Диаграмма рассеивания с центральной точкой, которая выделена красным цветом

Пример 1. Построим диаграмму рассеивания и её центр для десяти наблюдений:

x_j	2	4	5	6	3	4	5	2	3	2
y_j	5	2	1	2	3	4	2	6	4	5

Найдём средние арифметические: $\overline{x} = 3{,}9$, $\overline{y} = 3{,}2$. Точка с координатами $(3{,}9; 3{,}2)$ — центр диаграммы рассеивания. Можно считать, что эта точка в некотором смысле центральная точка облака. Заметьте, что центральная точка отсутствует в исходных данных, а поэтому не принадлежит диаграмме.

28.2. Линейная связь и случайные отклонения

Мы будем рассматривать случай, когда между изучаемыми случайными величинами предполагается линейная связь, искажённая действием случайных факторов. В этом случае точки группируются около ***оси диаграммы*** — некоторой прямой

$$y = kx + m.$$

Обозначим через ε_j ***случайные отклонения***, связанные с погрешностями измерения или действием неучтённых факторов. Тогда координаты точек на диаграмме рассеивания связаны соотношениями

$$y_j = kx_j + m + \varepsilon_j,$$

где j — номер наблюдения.

Пример 2. Возьмём рост и размер обуви десяти случайно выбранных мужчин. Получаем пары $(x_j; y_j)$, где x_j — рост человека, y_j — размер его обуви. Например, рост может быть $x_1 = 185$ см, а размер обуви — $y_1 = 44$.

Запишем данные в таблицу.

Номер наблюдения k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Рост x_k (см)	185	174	178	192	178	182	188	177	180	174
Размер обуви y_k	44	42	43	47	43	45	45	44	44	43

Точки на диаграмме рассеивания (рис. 62) группируются вблизи некоторой наклонной прямой[1]. Это указывает на вероятное наличие линейной зависимости между ростом и размером обуви выбранных людей.

[1] Пока что мы не объясняем, как именно можно построить ось диаграммы. Для этого есть много способов, но можно провести прямую просто на глаз. В п. 28.5 мы расскажем об одном из способов построения.

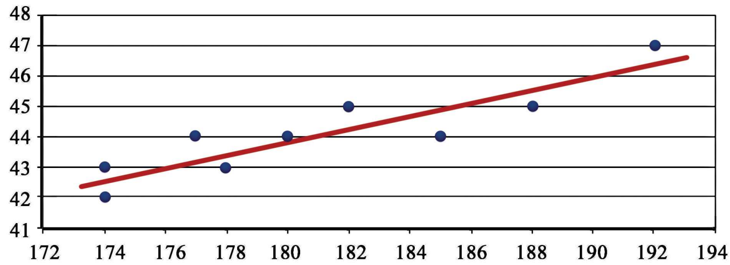


Рис. 62

Угловой коэффициент k прямой положителен, это говорит, что связь положительная — в целом, чем больше рост, тем больше размер обуви, хотя в отдельных случаях это правило нарушается. Это объясняется действием случайных факторов, ведь антропометрические данные человека — изменчивые величины, формирующиеся под действием множества обстоятельств, часть из которых мы не можем учесть.

Таким образом, линейная связь между размером обуви и ростом, вероятно, есть, но она не очень жёсткая, поскольку наблюдаются случайные отклонения: не все точки лежат на прямой или очень близко к ней.

28.3. Случайные отклонения

Случайные отклонения $\varepsilon_j = y_j - kx_j - m$ можно изобразить на диаграмме вертикальными отрезками, проведёнными от точек к прямой. Если точка $(x_j; y_j)$ выше прямой, то $\varepsilon_j > 0$, если точка $(x_j; y_j)$ ниже прямой, то $\varepsilon_j < 0$. Если точка $(x_j; y_j)$ точно попала на прямую, то $\varepsilon_j = 0$.

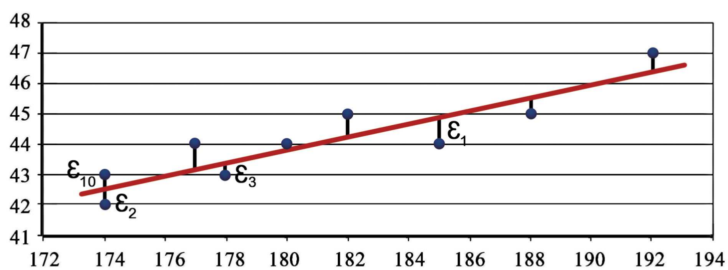


Рис. 63

Всё это можно записать на языке случайных величин:

$$Y = kX + m + \varepsilon,$$

где случайные величины X и ε независимы (мы здесь отступим от правила обозначать случайные величины большими латинскими буквами и используем обозначение ε для величины, описывающей случайное отклонение).

28.4. Выборочная ковариация

Определение. Среднее произведение отклонений x_j и y_j от их средних называется ***выборочной ковариацией*** и обозначается $\operatorname{cov}(x, y)$:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + (x_2 - \overline{x})(y_2 - \overline{y}) + \ldots + (x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y})}{n}.$$

Для ковариации есть более простая формула:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Сравните выражение для выборочной ковариации и формулу ковариации случайных величин (п. 12.3). Если в формуле выборочной ковариации заменить наблюдаемые значения теоретическими, а средние — математическими ожиданиями, то получится формула ковариации случайных величин.

28.5. Прямая наименьших квадратов

Если облако точек на диаграмме рассеивания значительно вытянуто, то провести подходящую прямую $y = kx + m$ можно на глаз, но есть много способов сделать это, применяя разные точные методы. Здесь мы опишем один метод. Он основан на интуитивном соображении: величина ε описывает случайные отклонения и погрешности. Поэтому мы будем подбирать числа k и m так, чтобы выполнялись два условия.

1. Прямая $y = kx + m$ должна проходить через центр диаграммы рассеивания — точку $(\overline{x}; \overline{y})$.

2. Дисперсия набора отклонений ε_j наименьшая возможная.

Из этих условий получаются значения k и m:

$$k = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{S_x^2}, \quad m = \overline{y} - k\overline{x}, \quad \text{где } S_x^2 \text{ — дисперсия чисел } x_j.$$

Доказательство. Прямая $y = kx + m$ по условию проходит через центр диаграммы $(\overline{x}; \overline{y})$. Поэтому $\overline{y} = k\overline{x} + m$, откуда $m = \overline{y} - k\overline{x}$.

Осталось найти выражение для k.

Из равенства $\overline{y} = k\overline{x} + m$ следует, что среднее отклонение $\overline{\varepsilon}$ равно нулю. Действительно,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = \frac{(y_1 - kx_1 - m) + (y_2 - kx_2 - m) + \ldots + (y_n - kx_n - m)}{n} =$$
$$= \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} - k\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - m = \overline{y} - k\overline{x} - m = 0.$$

Запишем дисперсию S_ε^2:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{(\varepsilon_1 - \overline{\varepsilon})^2 + (\varepsilon_2 - \overline{\varepsilon})^2 + \ldots + (\varepsilon_2 - \overline{\varepsilon})^2}{n} = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}{n}.$$

Дисперсия равна среднему квадрату отклонения ε_j. Эту величину нужно сделать наименьшей[1].

Вспомним, что $\varepsilon_j = y_j - kx_j - m$. Следовательно, дисперсия S_ε^2 равна среднему арифметическому чисел

$$(y_j - kx_j - m)^2 = (y_j - kx_j - \overline{y} + k\overline{x})^2 = ((y_j - \overline{y}) - k(x_j - \overline{x}))^2 =$$
$$= (x_j - \overline{x})^2 k^2 - 2k(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y}) + (y_j - \overline{y})^2.$$

Усредним эти числа:

$$S_\varepsilon^2 = S_x^2 \cdot k^2 - 2\operatorname{cov}(x, y) \cdot k + S_y^2.$$

Получается, что дисперсия S_ε^2 — квадратный трёхчлен относительно k:

$$S_\varepsilon^2 = ak^2 + bk + c,$$

где $a = S_x^2$, $b = -2\operatorname{cov}(x, y)$ и $c = S_y^2$.

Наименьшее значение этого трёхчлена достигается в точке

$$k = -\frac{b}{2a} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{S_x^2}.$$ ◀

Пример 3. Возьмём имеющиеся данные из задачи про рост и обувь. Найдём уравнение прямой наименьших квадратов для этих десяти пар наблюдений.

Номер наблюдения k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Среднее
Рост x_k (см)	185	174	178	192	178	182	188	177	180	174	180,8
Размер обуви y_k	44	42	43	47	43	45	45	44	44	43	44
Произведение $x_k y_k$	8140	7308	7654	9024	7654	8190	8460	7788	7920	7482	7962

Дисперсия: $S_x^2 = 31{,}96$. Ковариация: $\operatorname{cov}(x, y) = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 7962 - 180{,}8 \cdot 44 = 6{,}8$.

[1] Отсюда название метода — метод наименьших квадратов.

Тогда

$$k = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{S_x^2} = \frac{6{,}8}{31{,}96} \approx 0{,}213 \quad \text{и} \quad m = \overline{y} - k\overline{x} = 44 - 0{,}213 \cdot 180{,}8 \approx 5{,}532.$$

Значит, ось диаграммы, найденная методом наименьших квадратов, имеет уравнение $y = 0{,}213x + 5{,}532$.

Замечание 1. Если бы рост и размер обуви измеряли в других единицах (скажем, в дюймах), то диаграмма имела бы другую форму, а прямая наименьших квадратов — другое уравнение. Уравнение прямой зависит от единиц измерения.

Замечание 2. Иногда по ошибке считают, что чем больше коэффициент k, тем сильнее связь между величинами X и Y. Из замечания 1 видно, что это не так — коэффициент зависит не от силы связи, а от выбранных единиц измерения. Силу линейной связи между случайными величинами измеряют с помощью коэффициента корреляции.

§ 29. Выборочный коэффициент корреляции

29.1. Корреляция

На диаграмме рассеивания линейная связь наблюдаемых значений случайных величин проявляется в том, насколько плотно точки $(x_j; y_j)$ группируются около некоторой наклонной прямой $y = kx + m$. Для отдельных наблюдений x_j, y_j можно написать $y_j = kx_j + m + \varepsilon_j$. Чем меньше по модулю случайные отклонения ε_j, тем ближе точки к прямой.

Видимой близости часто недостаточно. Нужен числовой показатель, характеризующий силу наблюдаемой связи. В качестве такого показателя часто используют ***выборочный коэффициент корреляции***.

Определение 1. Выборочным коэффициентом корреляции для выборки, состоящей из пар (x_j, y_j), называется величина $r = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{S_x S_y}$.

29.2. Свойства выборочного коэффициента корреляции

Выборочный коэффициент корреляции обладает следующими свойствами.

1°. $-1 \leqslant r \leqslant 1$.

2°. $r = 0$ только тогда, когда $k = 0$. Это бывает, если точки $(x_j; y_j)$ образуют облако, не имеющее наклонной оси.

3°. $r = 1$ только тогда, когда все точки $(x_j; y_j)$ лежат на наклонной прямой $y = kx + m$ и $k > 0$.

4°. $r = -1$ только тогда, когда все точки $(x_j; y_j)$ лежат на наклонной прямой $y = kx + m$ и $k < 0$.

Доказательство. Мы нашли k из условия, что дисперсия случайных отклонений S_ε^2 наименьшая возможная. Чему же она равна? Подставим $k = \dfrac{\operatorname{cov}(x, y)}{S_x^2}$ в выражение для S_ε^2. Получаем

$$S_\varepsilon^2 = S_y^2 - \frac{\operatorname{cov}^2(x, y)}{S_x^2}.$$

Отсюда следует, что

$$r^2 = \frac{\operatorname{cov}^2(x, y)}{S_x^2 S_y^2} = 1 - \frac{S_\varepsilon^2}{S_y^2}.$$

Значит, $r^2 \leqslant 1$.

Знак r совпадает со знаком k, поскольку $r = k\dfrac{S_x}{S_y}$.

Если все точки $(x_j; y_j)$ лежат на прямой $y = kx + m$, то все числа ε_j равны нулю. Тогда $S_\varepsilon^2 = 0$ и поэтому $r^2 = 1$.

Обратно, если $r^2 = 1$, то $S_\varepsilon^2 = 0$, значит, все числа ε_j совпадают между собой. Но их среднее равно нулю. Следовательно, все ε_j равны нулю. Поэтому все точки $(x_j; y_j)$ лежат на прямой $y = kx + m$.

Таким образом, свойства 1—4 доказаны. ◀

На доказанных свойствах выборочного коэффициента корреляции основано измерение силы линейной связи между случайными величинами с помощью выборок из их совместного распределения.

Замечание. Сделать надёжный вывод о линейной связи с помощью выборочного коэффициента корреляции можно не всегда. Дело в том, что коэффициент r является случайной величиной, и его распределение известно не для любых совместных наблюдений величин X и Y.

Хорошо изучен случай, когда обе случайные величины X и Y имеют нормальное распределение. Для этого случая распределение коэффициента r известно и составлены специальные таблицы, которые позволяют подтвердить или отвергнуть предположение о линейной связи между X и Y с любой наперёд заданной вероятностью.

Пример 4. Вернёмся к данным задачи про рост и обувь. Найдём коэффициент корреляции.

Номер наблюдения k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Среднее
Рост x_k (см)	185	174	178	192	178	182	188	177	180	174	180,8
Размер обуви y_k	44	42	43	47	43	45	45	44	44	43	44
Произведение $x_k y_k$	8140	7308	7654	9024	7654	8190	8460	7788	7920	7482	7962

Стандартные отклонения: $S_x = 5{,}65$, $S_y = 1{,}34$.

Выборочная коварияция: $\operatorname{cov}(x, y) = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 7962 - 180{,}8 \cdot 44 = 6{,}8$.

Выборочный коэффициент корреляции: $r = \dfrac{6{,}8}{5{,}65 \cdot 1{,}34} \approx 0{,}896$.

Коэффициент корреляции высокий. Можно предположить, что между ростом и размером обуви прослеживается линейная зависимость. Однако оценивать вероятность того, что предложение верно мы не будем. Это выходит за рамки нашего курса.

Таблица значений функции $y = \Phi(x)$ стандартного нормального распределения[1] с точностью до 0,0001

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
−4,0	0,0000	−2,0	0,0228	0,0	0,5000	2,0	0,9772
−3,9	0,0000	−1,9	0,0287	0,1	0,5398	2,1	0,9821
−3,8	0,0001	−1,8	0,0359	0,2	0,5793	2,2	0,9861
−3,7	0,0001	−1,7	0,0446	0,3	0,6179	2,3	0,9893
−3,6	0,0002	−1,6	0,0548	0,4	0,6554	2,4	0,9918
−3,5	0,0002	−1,5	0,0668	0,5	0,6915	2,5	0,9938
−3,4	0,0003	−1,4	0,0808	0,6	0,7257	2,6	0,9953
−3,3	0,0005	−1,3	0,0968	0,7	0,7580	2,7	0,9965
−3,2	0,0007	−1,2	0,1151	0,8	0,7881	2,8	0,9974
−3,1	0,0010	−1,1	0,1357	0,9	0,8159	2,9	0,9981
−3,0	0,0013	−1,0	0,1587	1,0	0,8413	3,0	0,9987
−2,9	0,0019	−0,9	0,1841	1,1	0,8643	3,1	0,9990
−2,8	0,0026	−0,8	0,2119	1,2	0,8849	3,2	0,9993
−2,7	0,0035	−0,7	0,2420	1,3	0,9032	3,3	0,9995
−2,6	0,0047	−0,6	0,2743	1,4	0,9192	3,4	0,9997
−2,5	0,0062	−0,5	0,3085	1,5	0,9332	3,5	0,9998
−2,4	0,0082	−0,4	0,3446	1,6	0,9452	3,6	0,9998
−2,3	0,0107	−0,3	0,3821	1,7	0,9554	3,7	0,9999
−2,2	0,0139	−0,2	0,4207	1,8	0,9641	3,8	0,9999
−2,1	0,0179	−0,1	0,4602	1,9	0,9713	3,9	1,0000

Для значений $x \leqslant -4$ следует считать, что $\Phi(x) = 0$.
Для значений $x \geqslant 4$ следует считать, что $\Phi(x) = 1$.

[1] Примеры решения задач с помощью таблицы даны на следующей странице.

Как пользоваться таблицей

Пример 1. Найдём вероятность того, что случайная величина Z, распределённая по стандартному нормальному закону, примет значение из отрезка $[0{,}3; 0{,}7]$, то есть $0{,}3 \leqslant Z \leqslant 0{,}7$.

Решение. Имеем

$$\mathrm{P}(0{,}3 \leqslant Z \leqslant 0{,}7) = \Phi(0{,}7) - \Phi(0{,}3) = 0{,}7580 - 0{,}6179 = 0{,}1401.$$

Пример 2. Случайная величина Z распределена по стандартному нормальному стандартному закону. Найдём вероятность того, что $-0{,}35 \leqslant Z \leqslant 0{,}45$.

Эта вероятность равна

$$\mathrm{P}(-0{,}35 \leqslant Z \leqslant 0{,}45) = \Phi(0{,}45) - \Phi(-0{,}35).$$

В нашей таблице таких значений нет, но можно их найти приближённо. Например, чтобы найти $\Phi(0{,}45)$, можно взять среднее между $\Phi(0{,}4)$ и $\Phi(0{,}5)$:

$$\Phi(0{,}45) \approx \frac{\Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}5)}{2} = \frac{0{,}6554 + 0{,}6915}{2} = 0{,}6734.$$

Аналогично

$$\Phi(-0{,}35) \approx \frac{\Phi(-0{,}3) + \Phi(-0{,}4)}{2} = \frac{0{,}3821 + 0{,}3446}{2} = 0{,}3633.$$

Тогда

$$\mathrm{P}(-0{,}35 \leqslant Z \leqslant 0{,}45) \approx 0{,}6734 - 0{,}3633 = 0{,}3101.$$

Пример 3. Пусть случайная величина X распределена по закону $N(1; 4)$. Найдём вероятность того, что $1{,}2 \leqslant X \leqslant 2{,}6$.

Решение. Параметры распределения $a = 1$, $\sigma^2 = 4$. Это означает, что случайная величина $Z = \dfrac{X - a}{\sigma} = \dfrac{X - 1}{2}$ имеет стандартное нормальное распределение. Найдём границы соответствующего отрезка для Z. Левая граница:

$$\frac{1{,}2 - 1}{2} = 0{,}1.$$

Правая граница:

$$\frac{2{,}6 - 1}{2} = 0{,}8.$$

Следовательно, нужно найти вероятность того, что $0{,}1 \leqslant Z \leqslant 0{,}8$:

$$\mathrm{P}(1{,}2 \leqslant X \leqslant 2{,}6) = \mathrm{P}(0{,}1 \leqslant Z \leqslant 0{,}8).$$

Эту вероятность ищем с помощью таблицы:

$$\Phi(0{,}8) - \Phi(0{,}1) = 0{,}7881 - 0{,}5398 = 0{,}2483.$$

Словарь терминов

Бернулли распределение — распределение числа успехов при одном испытании с вероятностью успеха p и вероятность неудачи $q = 1 - p$.

Бином Ньютона — формула для возведения в n-ю степень двучлена (бинома) $a + b$:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Название формула получила в честь великого английского математика и физика сэра Исаака Ньютона, который обобщил её на случай дробных и отрицательных показателей степени.

Биномиальное распределение — распределение числа успехов S в серии из n испытаний Бернулли:

$$\mathrm{P}(S = k) = C_n^k p^n q^{n-k},$$

где p — вероятность успеха в одном испытании, а $q = 1 - p$ — вероятность неудачи. Числа n и p называют параметрами биномиального распределения. Частным случаем биномиального распределения является *распределение Бернулли*. Математическое ожидание равно np, дисперсия равна npq.

Биномиальные коэффициенты — коэффициенты в формуле бинома Ньютона Каждый коэффициент C_n^k является числом сочетаний из n по k.

Благоприятствующее элементарное событие. Элементарное событие, при наступлении которого наступает событие A, называется элементарным событием, благоприятствующим событию A.

Вероятность — числовая мера правдоподобия события. Вероятность принимает значения от 0 до 1.

Выбор наудачу (случайный выбор) — выбор одного или нескольких объектов из некоторой совокупности, при котором шансы на выбор любого объекта одинаковы.

Выборка — часть *генеральной совокупности* объектов, отобранная для исследования.

Генеральная совокупность. Множество всех объектов, подлежащее исследованию с помощью выборочного метода. Например, при изучении предпочтений избирателей перед выборами мэра города генеральной совокупностью являются все жители этого города, имеющие право голоса.

Генеральная совокупность может изучаться на распространённость какого-либо признака. Часто ставится задача оценки численности генеральной совокупности.

Геометрическое распределение. Распределение дискретной случайной величины X:

$$\mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

называется геометрическим распределением с параметром p. Геометрическое распределение даёт вероятность числа попыток до достижения успеха, если вероятность успеха в отдельном испытании равна p, а вероятность неудачи равна $q = 1 - p$.

Демография — наука о численности и составе населения.

Дерево вероятностей — граф, рёбра которого показывают переход из одного состояния в другое в случайном эксперименте. Например, так выглядит дерево вероятностей эксперимента, в котором бросаются две монеты. Корень дерева соответствует началу эксперимента. Иногда около рёбер удобно подписать соответствующие вероятности. Например, на рисунке всем рёбрам соответствуют вероятности 0,5.

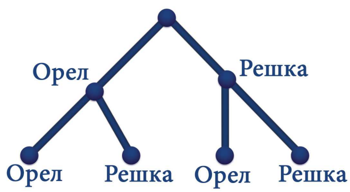


Диаграмма рассеивания — диаграмма, составленная из точек на координатной плоскости. Диаграммы рассеивания применяются для изучения связей между различными характеристиками, например ростом и весом животного и т. д. Абсцисса и ордината каждой точки — значения этих характеристик.

Диаграмма Эйлера — способ графического изображения событий в виде фигур на плоскости. Каждое событие изображается некоторой фигурой, пересечение событий — общей частью этих фигур, *объединение* событий — объединением фигур. Диаграммы Эйлера позволяют наглядно показать связь между различными событиями. Несовместные события изображаются фигурами, не имеющими общих точек.

Дискретная случайная величина — случайная величина, значения которой образуют конечную или бесконечную последовательность чисел. Как правило, каждое значение дискретной случайной величины имеет ненулевую вероятность — значения с нулевой вероятностью можно не рассматривать. Иногда значения с нулевой вероятностью добавляют для удобства решения задачи.

Дисперсия набора чисел — мера рассеивания значений числового набора $x_1, x_2, \dots, x_n$ относительно среднего арифметического. Дисперсию числового набора обычно обозначают S^2:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2.$$

Последнее выражение часто используется при расчётах. Его можно прочесть «средний квадрат без квадрата среднего».

Дисперсия случайной величины — мера рассеивания значений случайной величины относительно математического ожидания этой величины:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2, \quad \text{или} \quad \mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2.$$

Достоверное событие — случайное событие, которое обязательно наступает в ходе случайного эксперимента. Например, достоверным событием является объединение всех элементарных событий эксперимента. Достоверное событие имеет вероятность 1. Кроме достоверных событий часто говорят о почти достоверных и практически достоверных событиях.

Почти достоверное событие также имеет вероятность 1, но наступает не обязательно. Пример почти достоверного события — при случайном выборе числа из отрезка $[0; 1]$ выбрано не целое число. Это событие имеет вероятность 1, но не наступает, если выбрано число 0 или 1.

Практически достоверное событие — событие, вероятность которого для данного эксперимента считается достаточно большой, чтобы на него можно было полагаться. Например, при броске 20 монет вероятность получить хотя бы одного орла больше чем 0,999999. Такое событие можно рассматривать как практически достоверное. Практически достоверное событие противоположно практически невозможному.

Допуск — 1) максимально разрешённое отклонение какой-либо характеристики от её номинального значения; 2) интервал разрешённых значений этой характеристики; 3) разность наибольшего и наименьшего разрешённых значений.

При массовом производстве контролируется соответствие допуску основных характеристик изделия. Например, в пищевой промышленности — содержание пищевых добавок, масса упаковки готовой продукции и т. п.

Закон больших чисел — собирательное название группы теорем, утверждающих, что среднее значение суммы случайных величин мало отличаются от среднего значения их *математических ожиданий* при различных условиях. Основное условие — большое число складываемых величин, откуда и происходит название закона.

Испытание Бернулли — эксперимент, который заканчивается одним из двух элементарных событий: успехом или неудачей.

Игральная кость (математическая), **кубик** — генератор одного из шести равновозможных событий (граней кубика). Хорошим физическим приближением к математической кости является обычная правильная кость.

Комбинаторика — раздел математики, изучающий число комбинаций, составленных из элементов некоторого множества. Под комбинацией понимается подмножество, подчинённое некоторому условию, например упорядоченное или не содержащее повторяющихся элементов и т. п.

Маловероятное событие (практически невозможное событие) — случайное событие, вероятность которого в данных условиях считается малой (настолько, что на это событие не следует рассчитывать).

Монета (математическая) — генератор одного из двух равновозможных исходов (орёл и решка). Обычная монета является хорошей физической моделью математической монеты.

Математическое ожидание дискретной случайной величины — числовая характеристика дискретной случайной величины. Обозначается математическое ожидание $\mathrm{E}X$. Если X принимает n значений $x_1, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Если X имеет бесконечное количество значений, то математическое ожидание определено аналогично. У случайной величины с бесконечным количеством значений математическое ожидание может не существовать.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины. Если непрерывная случайная величина X имеет такую плотность вероятности $y = p(x)$, что существует интеграл[1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx,$$

то этот интеграл называется математическим ожиданием случайной величины X. Обозначение: EX.

[1] Интеграл с бесконечными пределами $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (несобственный) понимают как число, к которому стремится интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, если нижний предел a устремить к $-\infty$, а затем верхний предел b устремить к $+\infty$. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует не для всякой функции, даже если эту функцию можно проинтегрировать на любом конечном отрезке $[a; b]$.

Если все значения величины X расположены на отрезке $[a;b]$, то

$$\mathrm{E}X = \int_a^b xp(x)\,dx.$$

Невозможное событие — случайное событие, которое в данном опыте наступить не может. Пример — пустое событие. Невозможное событие противоположно достоверному.

Почти невозможное событие имеет вероятность 0, но всё же может наступить. Пример — при случайном выборе числа из отрезка $[0;1]$ выбрано число 0,5. Это событие может наступить, хотя его вероятность равна нулю.

Практически невозможное событие — событие, вероятность которого в данном эксперименте считается пренебрежимо малой. На практике практически невозможные события играют большую роль. Например, лекарство поступает в свободную продажу (с соответствующим предупреждением), если известно, что опасный побочный эффект от приёма этого лекарства — практически невозможное событие.

Независимые события. Два случайных события A и B называются независимыми, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Часто независимость событий объясняется организацией опыта, состоящего из независимых частей. Например, независимы два события, относящиеся к различным испытаниям Бернулли.

Независимые случайные величины. Если любые два случайных события, одно из которых связано со случайной величиной X, а другое — со случайной величиной Y, независимы, то случайные величины X и Y называются независимыми.

Аналогично определяется произвольное количество независимых величин.

Важным примером независимых величин является число успехов в различных независимых испытания Бернулли.

Для независимых случайных величин X и Y верны свойства математического ожидания, дисперсии и ковариации:

1) $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}X \cdot \mathrm{E}Y$;

2) $\mathrm{D}(X+Y) = \mathrm{D}X + \mathrm{D}Y$;

3) $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Непрерывная случайная величина — случайная величина, значения которой образуют один или несколько промежутков на числовой прямой.

Несовместные события — два случайных события, которые не могут наступить в одном и том же опыте вместе (одновременно). Примером несовместных событий являются противоположные события.

Нормальное распределение. Распределение с *функцией плотности*

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

называется нормальным распределением. *Математическое ожидание* случайной величины X, имеющей нормальное распределение, равно a, дисперсия равна σ^2. По закону, близкому к нормальному, распределены многие величины в природе, например рост человека. Если $a = 0$, а $\sigma = 1$, получаем стандартное нормальное распределение с плотностью

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Любую случайную величину, имеющую нормальное распределение, можно превратить в величину, распределённую по стандартному закону, если сделать подходящую замену переменной (замену единиц измерения).

Объединение случайных событий. Объединением случайных событий A и B называется событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из событий A и B.

Объём выборки — число объектов, отобранных из генеральной совокупности для проведения случайного исследования.

Орёл — одна из сторон монеты (аверс). Другая сторона (реверс) называется решкой. Выпадение орла — одно из двух элементарных событий при бросании монеты.

Пересечение (произведение) случайных событий. Пересечением случайных событий A и B называется событие, которое происходит в том и только в том случае, когда наступают оба события A и B.

Перестановка — один из способов нумерации элементов некоторого множества. Если в множестве n элементов, то существует $n!$ перестановок этих элементов.

Показательное распределение. Распределение с *функцией плотности*

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & \text{если } x \geqslant 0, \text{ где } \theta > 0, \end{cases}$$

называется показательным. По показательному закону распределено, например, время исправной работы прибора, если прибор не подвержен старению. Математическое ожидание равно θ, дисперсия равна θ^2.

Правило умножения вероятностей — правило, которое гласит, что вероятность пересечения событий равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности второго при условии, что первое наступило:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B).$$

Правило умножения комбинаторное — правило, которое гласит, что если имеется m различных предметов первого вида и n различных предметов второго вида, то из них можно составить $m \cdot n$ упорядоченных пар.

Аналогично вычисляется число упорядоченных наборов, состоящих из предметов трёх, четырёх и более типов.

Противоположное событие. Событием, противоположным случайному событию A, называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не наступило. Можно сказать иначе: событие $\overline{A}$ наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

Пустое событие. Случайное событие, которому не благоприятствует ни один элементарный исход. Можно сказать иначе — пустое множество элементарных исходов эксперимента. Вероятность пустого события равна нулю. Обозначение: $\varnothing$.

Равновозможные элементарные события — элементарные события, у которых одинаковые шансы на наступление. Примером может служить опыт, состоящий в бросании правильной игральной кости. В этом опыте шесть элементарных событий, и все они равновозможны.

Равновероятные события — случайные события, вероятности которых равны. Примером равновероятных событий служат равновозможные элементарные события.

Равномерное распределение. Непрерывное распределение случайной величины X, принимающей значения из отрезка $[a; b]$ так, что вероятность любого отрезка внутри $[a; b]$ пропорциональна его длине. Плотность вероятности:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b, \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание равно $\dfrac{a+b}{2}$, дисперсия равна $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Размах числового набора — разность между наибольшим и наименьшим значениями этого набора.

Распределение Бернулли. Дискретное распределение случайной величины X, принимающей всего два значения 0 и 1 с вероятностями q и p:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание равно p, дисперсия равна pq.

Распределение вероятностей — закон, по которому каждому значению случайной величины ставится в соответствие вероятность того, что величина примет это значение. Распределение для конечной случайной величины можно задать таблицей, диаграммой или формулой.

Респондент — участник теста или опроса.

Решка — одна из сторон монеты (реверс). Другая сторона (аверс) называется орлом. Выпадение решки — одно из двух элементарных событий при бросании монеты.

Серия испытаний Бернулли — случайный эксперимент, состоящий в последовательном проведении нескольких одинаковых независимых *испытаний Бернулли*.

Систематическая ошибка — одна и та же ошибка, возникающая при любом измерении или наблюдении и связанная с настройкой прибора. Например, если весы не отрегулированы, то они всё время могут показывать на 10 г больше, чем надо. Здесь 10 г — систематическая ошибка.

Если систематической ошибки нет, то все другие отклонения связаны со *случайной изменчивостью* и называются случайными ошибками измерения.

Случайная величина — величина, которая принимает те или иные значения в ходе случайного опыта в зависимости от исхода эксперимента.

Случайная изменчивость — способность некоторой величины принимать различные значения под воздействием различных случайных обстоятельств, которые нет возможности ни предвидеть, ни изменить.

Случайное событие — некоторое множество элементарных событий случайного эксперимента. Достоверное и невозможное события являются частными случаями случайных событий. Все другие случайные события могут либо наступить, либо не наступить в ходе эксперимента.

Случайный выбор — см. выбор наудачу.

Случайный опыт (случайный эксперимент) — математическая абстракция, описывающая реальный опыт, который может оканчиваться различными случайными событиями. Под случайным опытом можно также понимать наблюдение за некоторым явлением природы или измерение некоторой величины (длины, массы и тому подобное). Иногда случайный опыт проводят намеренно. Примером может служить любая игра или лотерея, спортивное состязание.

Совместное распределение случайных величин — способ указания вероятностей событий, связанных одновременно с несколькими случайными величинами в одном случайном эксперименте.

Социологическое обследование — сбор информации об обществе с помощью опроса специально отобранной группы населения (*выборки*). Примером социологического обследования может служить предварительный опрос избирателей, тестирование учащихся или абитуриентов, изучение спроса и предложения товаров.

Сочетание. Любой набор k предметов, отобранных из набора, в котором n предметов, называется сочетанием из n по k.

Среднее набора чисел — среднее арифметическое чисел этого набора, то есть их сумма, делённая на их количество.

Стандартное отклонение случайной величины — арифметический квадратный корень из *дисперсии* случайной величины: $\sqrt{DX}$.

Статистика — наука, посвящённая методам систематизации, обработки и использования большого количества данных.

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий случайные явления. Теория вероятностей разрабатывает методы вычисления вероятностей одних событий через вероятности других. Теория вероятностей изучает также случайные величины и их распределения.

Точность измерения характеризует ошибку измерения. Например, измеряя рост человека, говорят об измерении с точностью до сантиметра.

Треугольник Паскаля (числовой или арифметический треугольник) — треугольная таблица, в которой записаны биномиальные коэффициенты (числа сочетаний) C_n^k. Крайние числа в каждой строке равны 1. Каждое число внутри треугольника получается сложением двух чисел, стоящих над ним.

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Строки и столбцы нумеруются начиная с нуля. На рисунке показаны первые несколько строк треугольника Паскаля. Число $C_6^4 = 15$ обведено кружком. Оно стоит в шестой строке и в четвёртом столбце (столбцы на рисунке наклонные).

Треугольник назван в честь французского математика Блеза Паскаля, опубликовавшего в 1665 году «Трактат об арифметическом треугольнике».

Условная вероятность. Вероятность случайного события A, вычисленная при условии, что событие B наступило, называется условной вероятностью события A

при условии B. Обозначение: $\mathrm{P}(A|B)$;

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Факториал. Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. Факториал числа n обозначается $n!$.

Таким образом,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

для натурального n. Факториал нуля по определению полагают равным единице: $0! = 1$.

Формула сложения — правило, по которому вычисляется вероятность объединения событий. Для двух событий A и B верна формула

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Если события A и B несовместны, то формула принимает вид

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Для трёх событий формула принимает вид

$$\mathrm{P}(A \cup B \cup C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A \cap C) - \mathrm{P}(B \cap C) + \mathrm{P}(A \cap B \cap C).$$

Функция плотности вероятности. Пусть X — непрерывная случайная величина. Если существует такая неотрицательная функция $y = p(x)$, что для любого отрезка $[a; b]$ выполняется равенство

$$\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b p(x)dx,$$

то эта функция называется функцией плотности вероятности случайной величины X.

Сказанное можно пояснить: на каждом отрезке $[a; b]$ под графиком функции $y = p(x)$ заключена фигура, площадь которой равна вероятности этого отрезка $\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b)$.

Если функция распределения $y = F(x)$ случайной величины X дифференцируема, то функция плотности $y = p(x)$ существует и эти функции связаны соотношением $p(x) = F'(x)$.

Функция распределения. Пусть X — случайная величина. Функция

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x)$$

называется функцией распределения случайной величины X. Аргументом функции является число x. Например, $F(2) = \mathrm{P}(X \leqslant 2)$. Функция распределения определена на всей числовой прямой и не убывает. Если функция распределения дифференцируема, то её производная равна *функции плотности вероятности*.

Частота случайного события. Пусть при проведении n случайных опытов событие A наступило m раз. Частотой события A называется отношение $\frac{m}{n}$.

Частотный метод оценки вероятности. Часто применяется на практике. Состоит в том, что вероятность некоторого события оценивается частотой этого события в часто повторяющихся одинаковых опытах. Частотный метод является основой социологических исследований и других приложений теории вероятностей.

Число сочетаний. Число различных *сочетаний* из n по k обозначается C_n^k и вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Числа C_n^k образуют числовой треугольник (треугольник Паскаля).

Элементарное событие (элементарный исход) случайного эксперимента — простейшее событие; из элементарных событий в эксперименте наступает ровно одно.

Любое событие опыта, кроме невозможного, состоит из элементарных событий.

Задачи для повторения, для проверочных и самостоятельных работ

К главам I–II

1. Опыт состоит в измерении температуры тела с помощью ртутного медицинского термометра. Определите, какое множество элементарных событий в этом случайном опыте — дискретное или непрерывное.

2. В случайном эксперименте измеряют температуру воздуха в комнате с помощью электронного термометра, который показывает температуру с точностью до десятой доли градуса. Определите, дискретное или непрерывное множество элементарных событий в этом эксперименте.

3. Перед началом соревнований по художественной гимнастике жеребьёвкой определяется порядок выступления спортсменок. Из пятнадцати спортсменок трое представляют Российскую Федерацию. Найдите вероятность того, что начинать соревнования будет спортсменка не из России.

4. Перед началом соревнований по прыжкам на лыжах жеребьёвкой определяется порядок выступления прыгунов. Двое спортсменов представляют Россию, четверо — США, двенадцать из стран Европы и Азии. Найдите вероятность того, что третьим по счету будет выступать спортсмен из США.

5. В случайном эксперименте 4 раза бросают монету. Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию «орёл выпал ровно два раза».

6. В случайном эксперименте 4 раза бросают монету. Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию «орёл выпал не менее трёх раз».

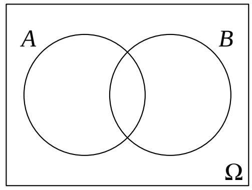
7. В ящике 5 красных и 4 синих шара. Случайным образом выбирают два шара. Найдите вероятность того, что оба выбранных шара — красные.

8. В коробке 10 лампочек, из них две неисправные. Покупатель выбирает случайным образом две лампочки. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из купленных лампочек исправна.

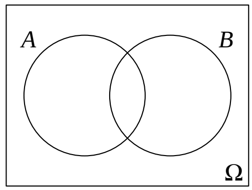
9. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпало 8 очков.

10. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность того, что хотя бы на одной из костей выпало не меньше чем 5 очков.

11. На диаграмме Эйлера заштрихуйте событие $A \cup \overline{B}$.



12. На диаграмме Эйлера заштрихуйте событие $\overline{A \cup B}$.



13. Игральную кость бросают дважды. Рассмотрим события

$$A = \{\text{на второй кости выпало нечётное число}\}$$

и

$$B = \{\text{сумма выпавших очков больше чем } 6\}.$$

Выпишите все элементарные исходы, благоприятствующие событию $A \cap \overline{B}$.

14. Игральную кость бросают дважды. Рассмотрим события

$$A = \{\text{на первой кости выпало чётное число}\}$$

и

$$B = \{\text{сумма выпавших очков меньше чем } 6\}.$$

Выпишите все элементарные исходы, благоприятствующие событию $\overline{A} \cap B$.

15. Из 15 юношей и 10 девушек последовательно случайным образом выбирают двух человек. Найдите вероятность того, что:

а) будут выбраны двое юношей;

б) сначала будет выбрана девушка, а затем — юноша.

16. Из 8 красных шаров и 7 белых шаров последовательно случайным образом выбирают два шара. Найдите вероятность того, что:

а) оба выбранных шара белые;

б) сначала будет выбран красный шар, а затем — белый.

17. В торговом центре установлены два кофейных автомата. Для каждого автомата вероятность того, что к концу дня в нём закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,13. Найдите вероятность события «к концу дня кофе закончится хотя бы в одном из автоматов».

18. В торговом центре установлены два платежных терминала. Для каждого терминала вероятность того, что к концу дня он выйдет из строя, равна 0,1. Вероятность того, что выйдут из строя оба автомата, равна 0,012. Найдите вероятность события «к концу дня оба терминала исправны».

19. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при одном выстреле равна 0,7. Определите, сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не меньше, чем 0,95.

20. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при одном выстреле равна 0,6. Определите, сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не меньше, чем 0,8.

К главе III

21. Монету бросили дважды. Известно, что один раз выпал орёл. При этом условии найдите вероятность события «выпала хотя бы одна решка».

22. Монету бросили дважды. Известно, что один раз выпала решка. При этом условии найдите вероятность события «оба раза выпала решка».

23. Вероятность события A равна 0,3, вероятность события $A \cap B$ равна 0,15. Найдите условную вероятность $\mathrm{P}(B|A)$.

24. Вероятность события C равна 0,6, вероятность события $A \cap C$ равна 0,45. Найдите условную вероятность $\mathrm{P}(A|C)$.

25. В торговом центре рядом расположены два кофейных автомата. Для каждого автомата вероятность того, что к закрытию центра в нём закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что к закрытию кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,13. Являются ли события «кофе закончится в первом автомате» и «кофе закончится во втором автомате» быть независимыми? Объясните свой ответ.

26. В вестибюле станции метро установлены два автомата по продаже проездных билетов, работающие независимо друг от друга. Для каждого автомата вероятность того, что до закрытия метро в нём закончится сдача, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к закрытию метро хотя бы в одном из автоматов сдача останется.

27. Алексей стреляет в мишень. Если мишень сбита, то стрельба прекращается. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

а) Найдите вероятность события

$$A = \{\text{для поражении мишени потребуется ровно 3 выстрела}\}.$$

б) Найдите вероятность того же события A, если известно, что в первый раз Алексей промахнулся.

28. Андрей стреляет в мишень. Если мишень сбита, то стрельба прекращается. Вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,3.

а) Найдите вероятность события

$$A = \{\text{для поражении мишени потребуется ровно 2 выстрела}\}.$$

б) Найдите вероятность того же события A, если известно, что в первый раз Андрей промахнулся.

29. Игральную кость бросали до тех пор, пока в сумме не выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что было сделано 3 броска.

30. Игральную кость бросали до тех пор, пока в сумме не выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что было сделано 2 броска.

31. В семье трое детей. Известно, что двое из них — мальчики. Найдите вероятность того, что третий ребёнок — девочка. (Считайте, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы.)

32. В семье трое детей. Известно, что один из детей — девочка. Найдите вероятность того, что в семье две девочки и один мальчик. (Считайте, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы.)

33. Одинаковые лампы определенной фирмы для автомобильных фар выпускают два завода. Первый производит $\frac{2}{3}$ всех ламп, и среди ламп, поступивших в продажу с первого завода, в среднем 0,5% неисправных. Остальные лампы поставляет в продажу второй завод, и среди них в среднем 2% неисправных.

а) Найдите вероятность того, что случайно выбранная лампа этой фирмы исправна.

б) Выбранная лампа оказалась неисправна. При этом условии найдите вероятность того, что она произведена на первом заводе.

34. Одинаковые предохранители определенной фирмы для автомобильных фар выпускают два завода. Первый производит 40% всех предохранителей, и среди предохранителей, поступивших в продажу с первого завода, в среднем 1% неисправных. Остальные предохранители поступают в продажу со второго завода, и среди них в среднем 2% неисправных.

а) Найдите вероятность того, что случайно выбранный предохранитель этой фирмы неисправен.

б) Выбранный предохранитель оказался исправен. При этом условии найдите вероятность того, что он произведен на втором заводе.

35. При симптомах некоторого заболевания врач назначает анализ на возбудителя этого заболевания. Известно, что в 2,8% случаев анализ положителен (показывает наличие возбудителя). Известно также, что только 2% пациентов, имеющих данные симптомы, в действительности больны. Вероятность того, что анализ ошибочно окажется положительным у здорового пациента, равна 0,01. Найдите вероятность того, что пациент, у которого анализ положителен, на самом деле здоров.

36. При симптомах некоторого заболевания врач назначает анализ на возбудителя этого заболевания. Известно, что в 98% случаев анализ отрицателен (не показывает наличие возбудителя). Известно также, что только 4% пациентов, имеющих данные симптомы, в действительности больны. Вероятность того, что анализ окажется отрицательным у здорового пациента, равна 0,99. Найдите вероятность того, что пациент, у которого анализ положителен, на самом деле здоров.

К главам IV-VII

37. Случайная величина X принимает значения 1, 4 и 5. Какие значения принимает случайная величина $3X-2$?

38. Случайная величина X принимает значения -2, 1 и 3. Какие значения принимает случайная величина $3-2X$?

39. Случайная величина X принимает значения 1 и 3. Случайная величина Y принимает значения -3, -2 и 0, независимо от величины X. Какие значения может принимать случайная величина $X+Y$?

40. Случайная величина X принимает значения 2 и 4. Случайная величина Y принимает значения -2, -1 и 0, независимо от величины X. Какие значения может принимать случайная величина $X-Y$?

41. Случайная величина X задана распределением

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $X \leqslant 2{,}5$.

42. Случайная величина X задана распределением

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $X \geqslant 0{,}5$.

43. Запишите распределение случайной величины «число орлов, выпавших при бросании трёх монет». Найдите вероятность того, что эта величина меньше 2.

44. Напишите распределение случайной величины «число решек, выпавших при бросании трёх монет». Найдите вероятность того, что эта величина больше 1.

45. Найдите математическое ожидание случайной величины

$$Y \sim \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

46. Найдите математическое ожидание случайной величины

$$Z \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

47. Случайная величина распределена по закону

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

а) Найдите математическое ожидание случайной величины $2X + 3$.

б) Найдите EX^2.

в) Найдите дисперсию случайной величины X.

г) Найдите дисперсию случайной величины $3X - 5$.

48. Случайная величина распределена по закону

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите математическое ожидание случайной величины $2X + 3$.

б) Найдите EX^2.

в) Найдите дисперсию случайной величины X.

г) Найдите дисперсию случайной величины $0{,}5X - 5$.

49. Найдите дисперсию случайной величины «число орлов при двукратном бросании монеты».

50. Найдите дисперсию случайной величины «число шестёрок при двукратном бросании кости».

51. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	1	3
−2	0,1	0,3
0	0,2	0,1
3	0,1	0,2

Запишите распределение случайной величины X.

52. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	−2	1	2
−3	0,2	0,3	0,1
1	0,1	0	0,3

Запишите распределение случайной величины Y.

53. Случайные величины X и Y независимы и имеют распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Запишите совместное распределение величин X и Y.

54. Случайные величины X и Y независимы и имеют распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Запишите совместное распределение величин X и Y.

55. Подбрасывают две игральные кости. В сумме выпало 9 очков. Найдите коэффициент корреляции случайных величин «число очков, выпавшее на первой кости» и «число очков, выпавшее на второй кости»;

56. Игральную кость подбрасывают дважды. Известно, что во второй раз выпало на 2 очка больше, чем в первый. Найдите коэффициент корреляции случайных величин «число очков, выпавшее в первый раз» и «число очков, выпавшее во второй раз».

57. Монету бросили 4 раза. Найдите:

а) ковариацию случайных величин «число орлов, выпавших в первый раз» и «общее число выпавших орлов»;

б) коэффициент корреляции этих величин.

58. Игральную кость бросили дважды. Найдите:

а) ковариацию случайных величин «число очков, выпавших в первый раз» и «сумма выпавших очков»;

б) коэффициент корреляции этих величин.

59. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	0	1	2
−3	0,2	0,3	0,1
1	0,1	0	0,3

а) Найдите ковариацию случайных величин X и Y.

б) Являются ли величины X и Y независимыми?

60. Дано совместное распределение двух случайных величин:

$X \backslash Y$	0	1
−2	0,2	0,1
0	0,1	0,3
2	0,2	0,1

а) Найдите ковариацию случайных величин X и Y.

б) Являются ли величины X и Y независимыми?

61. Случайная величина X имеет геометрическое распределение с вероятностью успеха в одном испытании $p = 0{,}3$. Найдите:

а) EX; б) DX.

62. Случайная величина X имеет геометрическое распределение с вероятностью успеха в одном испытании $p = 0{,}4$. Найдите:

а) EX; б) DX.

63. Михаил стреляет по мишени до тех пор, пока не попадет в неё. При попадании мишень падает. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что Михаил сделает не более трех выстрелов.

64. Стрелок стреляет по мишени до первого промаха. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок сделает не менее трех выстрелов.

65. Число попыток отправить SMS с мобильного телефона имеет геометрическое распределение. Предположим, что в некоторой местности, чтобы отправить

SMS, нужно в среднем 4,5 попытки. Найдите вероятность того, что SMS благополучно отправится с первой же попытки.

66. Число попыток отправить SMS с мобильного телефона имеет геометрическое распределение. Предположим, что в некоторой местности, чтобы отправить SMS, нужно в среднем 6 попыток. Найдите вероятность того, что SMS благополучно отправится с первой же попытки.

К главам VIII и IX

67. Производится серия из 6 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{3}$ в одном испытании. Найдите вероятность одного элементарного события, в котором ровно 3 успеха.

68. Производится серия из 5 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $\frac{1}{4}$ в одном испытании. Найдите вероятность одного элементарного события, в котором ровно 2 успеха.

69. Производится серия из 8 испытаний Бернулли. Сколько элементарных событий этого опыта благоприятствуют появлению ровно 6 успехов?

70. Производится серия из 7 испытаний Бернулли. Сколько элементарных событий этого опыта благоприятствуют появлению ровно 4 успехов?

71. Монету бросают 6 раз. Найдите вероятность события:

а) «выпало четыре орла»;

б) «выпало не менее трёх орлов».

72. Игральную кость бросают 4 раза. Найдите вероятность события:

а) «шестёрка выпала ровно два раза»;

б) «шестёрка выпала меньше двух раз».

73. В школе производится запись в будущий первый класс. Будем считать, что очередной ребёнок может оказаться мальчиком или девочкой с равными вероятностями. Напишите выражение для вероятности того, что из записанных 76 детей ровно 38 детей окажется мальчиками.

74. Монету бросают 80 раз. Напишите выражение для вероятности того, что ровно 40 раз выпадет решка.

75. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины «число выпавших шестёрок при 100 бросаниях игральной кости».

76. Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,6 при каждом выстреле. На тренировке стрелок делает 50 выстрелов. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины «число попаданий».

К главам X–XIII

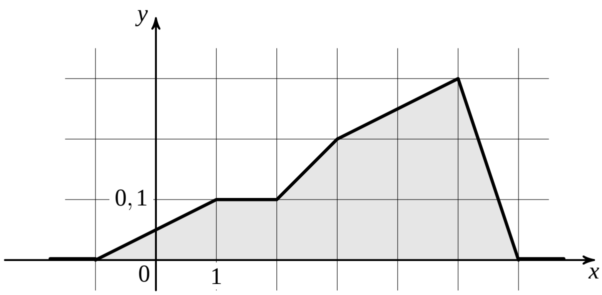
77. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1; 1]$. Найдите вероятность события $-0{,}5 \leqslant X \leqslant 2$.

78. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[3; 6]$. Найдите вероятность события $3{,}6 \leqslant X \leqslant 7$.

79. Постройте график плотности равномерного распределения на отрезке $[1; 4]$. Чему равна функция плотности в точке: а) $x_0 = -1$, б) $x_0 = 2$?

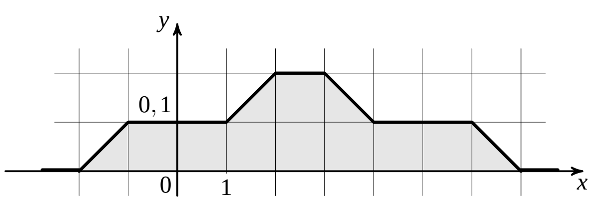
80. Постройте график плотности равномерного распределения на отрезке $[-1; 3]$. Чему равна функция плотности в точке: а) $x_0 = 1$, б) $x_0 = 4$?

81. Дан график плотности распределения случайной величины X.



Найдите вероятность события: а) $X \leqslant 3$; б) $2 \leqslant X \leqslant 5$.

82. Дан график плотности распределения случайной величины X.



Найдите вероятность события: а) $X \leqslant 4$; б) $1 \leqslant X \leqslant 5$.

83. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Пользуясь таблицей функции $y = \Phi(x)$, найдите вероятность события $-1{,}3 \leqslant X \leqslant 1{,}3$.

84. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Пользуясь таблицей функции $y = \Phi(x)$, найдите вероятность события $-0{,}7 \leqslant X \leqslant 0{,}7$.

85. Внешний диаметр подшипника должен быть равен 25,4 мм. Допустимое отклонение равно 0,1 мм. Ошибка измерения имеет нормальное распределение со средним значением 0 и со стандартным отклонением 0,05 мм. Результат измерения

25,5 мм. Найдите вероятность того, что диаметр подшипника находится в пределах допустимого.

86. Внешний диаметр подшипника должен быть равен 12,7 мм. Допустимое отклонение равно 0,1 мм. Диаметр измеряют штангенциркулем, Ошибка измерения имеет нормальное распределение со средним значением 0 и со стандартным отклонением 0,05 мм. Результат измерения 12,7 мм. Найдите вероятность того, что диаметр подшипника находится в пределах допустимого.

87. Срок службы мобильного телефона — случайная величина, распределенная по показательному закону. Средний срок службы телефона определенной модели 36 месяцев. Найдите вероятность того, что телефон этой модели после покупки прослужит не более 2 лет.

88. Срок службы мобильного телефона — случайная величина, распределенная по показательному закону. Средний срок службы телефона определенной модели 30 месяцев. Найдите вероятность того, что телефон этой модели после покупки прослужит не менее 3 лет.

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «сумма выпавших очков равна 5».

2. В светильнике две одинаковые лампочки, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что новая лампочка перегорит в течение месяца, равна 0,06. Найдите вероятность того, что к концу месяца хотя бы одна лампочка будет работать.

3. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

а) вероятность события $X \geqslant 0{,}3$;

б) математическое ожидание этой случайной величины;

в) дисперсию этой случайной величины.

4. Дано совместное распределение двух случайных величин:

X \ Y	-2	0
-3	0,3	0,2
-2	0,18	0,12
1	0,12	0,08

а) Запишите распределение случайной величины X.

б) Проверьте, независимы ли случайные величины X и Y.

5. При отправке SMS телефон автоматически предпринимает несколько попыток до тех пор, пока информация не будет передана без искажений. Предположим, что вероятность отправки SMS с одной попытки равна 0,6. Найдите вероятность того, что для отправки SMS потребуется:

а) две попытки; б) не более трёх попыток.

6*. Игральную кость подбрасывали до тех пор, пока сумма выпавших очков не стала равна 3. Найдите вероятность того, что было сделано 3 броска.

Вариант 2

1. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «сумма выпавших очков равна 7».

2. В светильнике две одинаковые лампочки, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что новая лампочка перегорит в течение месяца, равна 0,08. Найдите вероятность того, что к концу месяца перегорят обе лампочки.

3. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найдите:

а) вероятность события $X \leqslant 1{,}8$;

б) математическое ожидание этой случайной величины;

в) дисперсию этой случайной величины.

4. Дано совместное распределение двух случайных величин:

X \ Y	-2	0
-3	0,06	0,14
-2	0,06	0,24
1	0,18	0,32

а) Запишите распределение случайной величины X.

б) Проверьте, независимы ли случайные величины X и Y.

5. При получении небольшого файла из Интернета компьютер автоматически предпринимает несколько попыток до тех пор, пока файл не будет получен без искажений. Предположим, что вероятность получения файла с одной попытки равна 0,7. Найдите вероятность того, что для получения файла потребуется:

а) три попытки; б) не более двух попыток.

6*. Игральную кость подбрасывали до тех пор, пока сумма выпавших очков не стала равна 3. Найдите вероятность того, что было сделано 2 броска.

Контрольная работа 2

Вариант 1

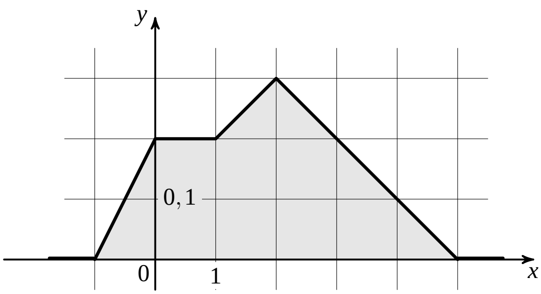
1. Проводится 5 испытаний Бернулли с вероятностью успеха 0,3 в каждом испытании. Найдите вероятность того, что ровно 3 испытания закончатся успехом.

2. Социологическим опросом установлено, что за кандидата А. в мэры большого города на выборах собирается проголосовать 10% всех избирателей. На некотором участке проголосовало 900 избирателей. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины «число проголосовавших за кандидата А. на этом участке».

3. При измерении длины отрезка линейкой в миллиметрах случайная погрешность измерения равномерно распределена на отрезке от $-0{,}5$ до $0{,}5$ мм. Результат измерения показал 62 мм. Найдите вероятность того, что истинная длина отрезка заключена в пределах от 61,9 до 62,3 мм.

4. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Пользуясь таблицей функции $y=\Phi(x)$, найдите вероятность события $|X|\geqslant 2{,}1$.

5. Дан график плотности распределения случайной величины X.



Найдите вероятность события $X\leqslant 3$.

6*. Срок исправной работы телевизора имеет показательное распределение. Известно, что средний срок службы телевизора данной модели равен 8 лет. Найдите вероятность того, что телевизор этой модели, прослуживший уже год, прослужит до первого ремонта не более 2 лет.

Вариант 2

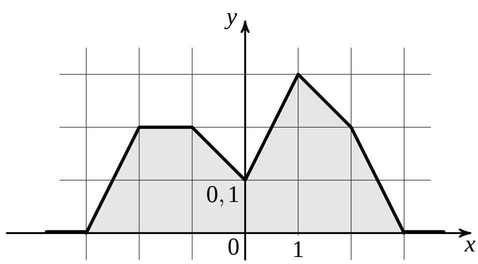
1. Проводится 4 испытания Бернулли с вероятностью успеха 0,4 в каждом испытании. Найдите вероятность того, что ровно 2 испытания закончатся успехом.

2. Социологическим опросом установлено, что за кандидата П. в мэры большого города на выборах собирается проголосовать 20% всех избирателей. На некотором участке проголосовало 1600 избирателей. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины «число проголосовавших за кандидата П. на этом участке».

3. При измерении угла транспортиром случайная погрешность измерения равномерно распределена на отрезке от $-0{,}5^\circ$ до $0{,}5^\circ$. Результат измерения некоторого угла 54°. Найдите вероятность того, что истинная величина угла от $53{,}8^\circ$ до $54{,}4^\circ$.

4. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Пользуясь таблицей функции $y=\Phi(x)$, найдите вероятность события $|X| \geqslant 1{,}5$.

5. Дан график плотности распределения случайной величины X.



Найдите вероятность события $X \geqslant -1$.

6*. Срок исправной работы компьютера имеет показательное распределение. Известно, что средний срок службы компьютера данной модели равен 6 лет. Найдите вероятность того, что компьютер этой модели, прослуживший уже два года, прослужит до первого ремонта еще не менее 3 лет.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «сумма выпавших очков меньше 5».

2. Проводится серия из 5 испытаний Бернулли с вероятностью успеха 0,2 в каждом испытании. Найдите вероятность того, что ровно 4 испытания закончатся успехом.

3. Одинаковые авторучки некоторой модели выпускают две фабрики. Первая производит 40% всех ручек, вторая — остальные. Известно, что среди авторучек, поступивших в продажу с первой фабрики, в среднем 2% бракованных, а среди ручек, поступивших со второй фабрики, в среднем 3% бракованных. Найдите вероятность того, что случайно выбранная авторучка этой модели будет бракованной.

4. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

5. Диаметр цилиндра некоторого автомобильного двигателя должен быть равен 79 мм. Допустимое отклонение составляет 0,04 мм в ту или в другую сторону. Диаметр измеряют специальным прибором. Ошибка измерения имеет нормальное распределение со средним значением 0 и со стандартным отклонением 0,01 мм. Результат измерения 78,98 мм. Найдите вероятность того, что диаметр цилиндра находится в пределах допустимого.

6*. Монету бросили 10 раз. Известно, что 8 раз выпал орёл. Найдите при этом условии вероятность того, что среди первых 5 бросков ровно 3 раза выпал орёл.

Вариант 2

1. Игральную кость бросают дважды. Найдите вероятность события «сумма выпавших очков больше 8».

2. Проводится серия из 4 испытаний Бернулли с вероятностью успеха 0,8 в каждом испытании. Найдите вероятность того, что ровно 3 испытания закончатся успехом.

3. Одинаковые телевизоры некоторой модели выпускают два завода. Первый производит 70% всех телевизоров, второй — остальные. Известно, что среди телевизоров, поступивших в продажу с первого завода, в среднем 1% бракованных, а среди телевизоров, поступивших со второго завода, в среднем 2% бракованных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный телевизор этой модели окажется качественным.

4. Дано распределение случайной величины:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

5. Диаметр цилиндра некоторого автомобильного двигателя должен быть равен 81 мм. Допустимое отклонение составляет 0,04 мм в ту или в другую сторону.

Диаметр измеряют специальным прибором. Ошибка измерения имеет нормальное распределение со средним значением 0 и со стандартным отклонением 0,01 мм. Результат измерения 81,03 мм. Найдите вероятность того, что диаметр цилиндра находится в пределах допустимого.

6*. Монету бросили 10 раз. Известно, что орел выпал 7 раз. Найдите при этом условии вероятность того, что среди первых 6 бросков ровно 4 раза выпал орёл.

Ответы

К главе I

1. 36. **2.** 8. **3.** 10. **4.** 150. **9.** 216. **10.** 1024. **15.** 1296.
16. 2^{20}. **18.** C_{100}^{5}, то есть 75 287 520. **19.** $C_{10}^{2} \cdot C_{15}^{3}$, то есть 20 475.
22. а) (1; 6), (6; 1), (2; 6), (6; 2), (3; 6), (6; 3), (4; 6), (6; 4), (5; 6), (6; 5), (6; 6) — всего 11 событий; б) 6 событий; в) 9 событий; д) 35.
23. ИП, ИА, ИЮ, ИВ — 4 события.
25. а) {П, НП, ННП}; б) {НП, ННП, НННП, ННННП};
в) {ННП, НННП, ННННП, ...}.
28. б) {КС, КЖ, СЖ}; в) нет.
29. а) $\{(1;3),\ (3;1),\ (2;4),\ (4;2),\ (3;5),\ (5;3),\ (4;6),\ (6;4)\}$;
б) $\{(4;6),\ (5;5),\ (5;6),\ (6;4),\ (6;5),\ (6;6)\}$.
31. $\frac{1}{3}$. **32.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{7}{18}$. **33.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{32}$; в) $\frac{1}{256}$; г) $\frac{1}{1024}$; д) $\frac{1}{2^n}$.
34. а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{216}$; в) $\frac{1}{1296}$. **35.** $\frac{5}{512}$. **36.** $\frac{9}{25}$. **37.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{7}{12}$.
38. а) $\frac{1}{1024}$; б) $\frac{5}{512}$.
39. а) $C_{25}^{5} = 53\,130$; б) прибл. 0,005; в) прибл. 0,057; г) прибл. 0,385.
40. а) $\frac{7}{15}$; б) $\frac{7}{15}$; в) $\frac{1}{15}$. **41.** прибл. 0,227. **42.** прибл. 0,233.
43. а) 0,4; б) 0,2; в) 0,6. **44.** а) 0,3; б) 0,1; в) 0,7. **45.** а) $\frac{1}{720}$; б) $\frac{1}{120}$.
46. 0,7. **47.** 0,88. **48.** 0,589. **49.** а) прибл. 0,41; б) прибл. 0,374; в) 0,4.

К главе II

51. а) «Город в европейской части России с населением менее 2 млн человек»;
б) $A \cap B =$ {Нижний Новгород, Самара, Казань, Ростов на Дону, Уфа Волгоград}.
52. а) $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(A \cap C) = 0$, $\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{3}{8}$; б) да, есть.
53. $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(A \cap C) = \frac{1}{18}$, $\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{1}{36}$.
54. $\mathrm{P}(A) = \frac{12}{27}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{10}{27}$, $\mathrm{P}(C) = \frac{2}{9}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{4}{27}$, $\mathrm{P}(A \cap C) = 0$, $\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{2}{9}$.
56. а) 9; б) 6; в) $C = \{(1;1),\ (1;2),\ (1;3),\ (2;1),\ (2;2),\ (3;1)\}$;
г) $A \cup B = \left\{\begin{matrix}(1;1), (2;1), (2;2), (2;4), (2;6), (3;1), (4;1), (4;2), \\ (4;4), (4;6), (5;1), (6;1), (6;2), (6;4), (6;6)\end{matrix}\right\}$;

д) $B\cup C=\{(1;1),\ (1;2),\ (1;3),\ (2;1),\ (2;2),\ (3;1),\ (4;1),\ (5;1),\ (6;1)\}$;

е) $A\cup C=\left\{\begin{matrix}(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;4),(2;6),\\(3;1),(4;2),(4;4),(4;6),(6;2),(6;4),(6;6)\end{matrix}\right\}$;

ж) A и B несовместны; з) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{12}$, $\mathrm{P}(B\cup C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cup C)=\frac{7}{18}$.

57. а) «Население города менее 2 млн человек или город находится в европейской части России»; б) Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск, Екатеринбург, Нижний Новгород, Самара, Омск, Казань, Челябинск, Ростов-на-Дону, Уфа, Волгоград.

58. Не могут.

59. $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{10}{27}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{9}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup C)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B\cup C)=\frac{10}{27}$.

60. а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1.

61. а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{5}{8}$.

64. $\overline{A}=\{$любой вариант, кроме 3 орлов$\}$; $\overline{B}=\{$в первый раз выпала решка$\}$; $\overline{C}=\{$выпало не более одного орла$\}$.

65. $\overline{B}=\{$среди выбранных либо 2 девушки, либо нет девушек$\}$.

66. а) «выбран мужчина — сельский житель»; б) «выбрана городская жительница»; в) «выбран мужчина — городской житель, но не пенсионер»; г) «выбрана женщина-пенсионерка из села».

67. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{13}{15}$. **68.** а) $\frac{65}{76}$; б) $\frac{88}{95}$. **69.** Прибл. 0,518.

71. а) $\varnothing$; б) $A\cap C=\{(2;2)\}$; в) $B\cap C=\{(1;1),\ (2;1),\ (3;1)\}$; г) A и B.

72. 13.

74. $A=\{\text{ОО, ОР}\}$; $B=\{\text{ОО, РО}\}$; $A\cup B=\{\text{ОО, ОР, РО}\}$.

75. а) $\{$один раз выпала решка$\}\cup\{$два раза выпала решка$\}$; б) $\{$оба раза выпал орёл$\}\cup\{$оба раза выпала решка$\}$.

78. а) $A\cap B=\{6\}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$; б) $A\cap B=\varnothing$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$; в) $A\cap B=\{4\}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$; г) $A\cap B=\varnothing$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$;

79. а) $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$; б) $\mathrm{P}(A\cup B)=1$; в) $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$; г) $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$.

80. а) 32; б) 41; в) 13; г) 60.

81. в) $\frac{11}{36}$; г) $\frac{1}{36}$.

82. б) 4; в) $U\cap V=\{$на обеих костях выпало число очков, кратное 3$\}$; $\mathrm{P}(U\cap V)=\frac{1}{9}$; г) $U\cup V=\{$на первой или на второй кости выпало число очков, кратное 3$\}$; $\mathrm{P}(U\cup V)=\frac{5}{9}$.

83. б) 9; в) 27; г) $\frac{3}{4}$; д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{4}$; **86.** б) A и C; г) верно; д) верно; е) 0; ж) не верно.

87. а) {один пирожок купил учитель, один учащийся};
б) {либо учитель купил два пирожка, либо один пирожок учитель и один — учащийся}.

88. 8. **89.** а) 0,6; б) 0,15; в) 0,87; г) $\frac{1}{2}$; д) $1-p$.

92. а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) да.

93. а) $P(\overline{A})=\frac{5}{6}$; б) $P(\overline{A})=\frac{1}{2}$; в) $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$.

94. а) $\frac{35}{36}$; б) $\frac{35}{36}$; в) $\frac{11}{12}$; г) $\frac{11}{12}$.

95. а) 10; б) 0,4; в) «выбран мальчик»; г) 0,6.

96. а) $\frac{15}{16}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{5}{16}$; г) $\frac{3}{8}$.

97. а) «выбрана хотя бы одна девочка»; б) «выбраны ученики разных полов».

98. а) «в течение года ни одна не перегорит»;
б) «в течение года перегорит 0, 1, 3, 4 или 5 лампочек»;
в) «перегорит не более трёх лампочек»;
г) «перегорит не менее четырёх лампочек».

101. а) Нет; б) «среди выбранных либо 2 девушки, либо 2 юноши».

103. а) $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$; б) $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$; в) $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$; г) $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

104. б) $P(A\cap B)=\frac{1}{9}$. **110.** а) 4; б) 6; в) 12. **111.** а) 2; б) 4; в) 4.

112. а) $B\cap\overline{A}$; б) $\overline{A\cup B}$. **113.** а) $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$; б) $\overline{A\cup B}\cup(A\cap B)$.

120. а) Да; б) $\frac{2}{3}$.

121. а) Нет; б) «выпало любое число, кроме 5»; в) $\frac{5}{6}$.

122. а) Нет; б) нет; в) да. **127.** а) 1; б) 0,8. **128.** а) 0,5; б) 0,3.

129. а) Нет; б) да. **131.** 0,1. **132.** 0,8. **133.** 0,3. **134.** а) Не могут; б) 0,06.

135. а) 0,7; б) 0,69; в) $2-(\alpha+\beta)$; г) $(a+b)^2$.

136. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **137.** а) 0,98; б) 0,02; в) 0,18; г) 0,26.

138. а) 0,84; б) 0,16; в) 0,24; г) 0,48. **139.** а) 0,98; б) 0,02; в) 0,08; г) 0,18.

140. а) $2p(1-p)$; б) $p(1-p)$; в) $(1-p)^2$.

К главе III

142. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{4}$. **143.** а) 0,8; б) 0,5. **144.** а) $\frac{3}{7}$; б) $\frac{4}{7}$.

145. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{6}$. **146*.** а) 0,5; б) 0,75; в) 0. **147.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{5}{9}$; в) $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$.

148. а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{5}$. **149.** а) 0,6; б) 0,6; в) 0,3. **150.** 0,485.

151. а) 0,34; б) 0,6. **152.** 0,84. **153.** 0,07. **154.** 0,026. **155.** $\frac{4}{15}$.
156. Прибл. 0,01. **157.** 0,0196. **158.** Нет; p. **160.** 1. **161.** 0,0009.
162. а) $\frac{7}{18}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{11}{18}$; д) 0. **163.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{3}$.
164. а) $\frac{1}{20}$; б) Нет. **165.** 0,86. **166.** а) 0,973; б) 0,441; в) 0,91.
167. а) 0,49; б) 0,343; в) 0,343; г) 0,7. **168.** б) 0,822. **169.** $\frac{4}{9}$. **170.** $\frac{1}{4}$.
171. 0,18. **172.** $\frac{1}{6}$. **173.** а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{5}{18}$; в) $\frac{1}{3}$; г) 0. **174.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$.
175. 0,028. **176.** 0,9812. **177.** $\frac{3}{4}$. **178.** $\frac{1}{8}$.
179. а) $A \cap B$; б) 10^{-10}; в) 10^{-5}; г) 10^{5}. **180.** 0,9975. **181.** $\frac{1}{16}$. **182.** 0,0243.
183. 0,343. **184.** 0,82. **185.** 0,504. **186.** 0,271. **187.** $\frac{2}{3}$. **188.** $\frac{1}{2}$.
189. а) 0,384; б) 0,32; в) 0,64. **190.** $\frac{49}{216}$. **191*.** а) $\frac{1}{49}$; б) $\frac{12}{49}$; в) $\frac{36}{49}$.

К главе IV

192. а) 0,1,2; б) 0,25; в)

k	0	1	2
p	0,25	0,5	0,25

193. в)

k	0	1	2	3
p	0,125	0,375	0,375	0,125

194. а) 1,4,9,16,25,36; б) $\frac{1}{6}$.

195. а)

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

б)

Y	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

в)

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

г)

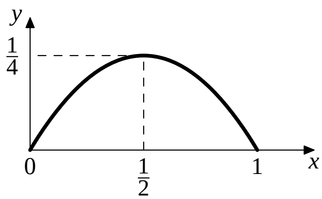
T	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

д)

M	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

196. Все натуральные числа. **197.** а) $0, 1, 2, ..., 26$. **200.** а) 0,1,2; б) 0,5.
201. а) $0, 1, 2{,}3$; б) прибл. 0,167. **202.** а) $0, 1, 2, ..., 25$; б) нет. **203.** $\frac{1}{2}$. **204.** $\frac{1}{12}$.
207. а) $-11, -8, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1$; б) $-24, -9, -3, 0, 2, 6, 10, 16$.
208. а) $-1, 0, 1, 2, 3$; б) $-2, -1, 0, 1, 2$; в) $-2, -1, 0, 2, 3, 4$; г) $-2, 0, 2, 4$; д) $-2, -1, 0, 1, 2$; е) $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$.
209. 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 120 (тыс. руб.).
210. Целые числа от 2 до 12. **212.** 0,2. **213.** а) $(X=-1)\cup(X=0)\cup(X=2)$.
214. а) 0; б) 0,25; в) 0,55.
215. а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix} 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -4 & -2{,}5 & -1 & 0{,}5 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.
216. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}328 & 0{,}41 & 0{,}205 & 0{,}05 & 0{,}007 & 0 \end{pmatrix}$; б) 0,738; в) 0,262.
217. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. **218.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.
219. а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{15}{16}$; г) $\frac{5}{8}$. **220.** б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{19}{36}$; г) $\frac{19}{36}$.
221*. $\mathrm{P}(x=k)=\dfrac{C_{10}^{k}C_{15}^{4-k}}{C_{25}^{4}}$, где $k=0, 1, 2, 3, 4$.
223. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{7}{36} & \frac{7}{36} & \frac{2}{9} & \frac{7}{36} & \frac{7}{36} \end{pmatrix}$
224. а) прибл. 0,9997; б) прибл. 0,997; в) прибл. 0,985; г) прибл. 0,943.
226. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0{,}300 & 0{,}210 & 0{,}147 & 0{,}103 & 0{,}072 & 0{,}050 & 0{,}035 & 0{,}025 & 0{,}017 & 0{,}012 \end{pmatrix}$;
б) прибл. 0,832; в) прибл. 0,118.
227. 9. **228.** а) 0,8; б) 0,7; в) p. **229.** а) 2,1; б) 0,55.
230. а) 2; б) $-0{,}5$. **231.** 7,5. **232.** См. пример 14 на с. 85. **233.** а) $\frac{1}{2}$; б) 1.
234. а) 7,5; б) 7,85. **235.** а) 3; б) 10. **236.** $\frac{161}{36}$. **237.** 1,54.

238*. а) Нет; б) да. **241.** 960. **242.** 78. **243.** а) 523; б) 619; в) 10; г) 170.
244. $EX = 15{,}5$; $EY = 4{,}5$. **245.** а) $Y = 1{,}8X + 32$; б) $69{,}8°F$.
246. а $Y = \frac{1}{1{,}609}X$; б) прибл. 52,52 миль/ч. **247.** прибл. 75 кг.
248. а) 7; б) $\frac{35}{18}$; в) $\frac{161}{36}$; г) $\frac{91}{36}$. **249.** $3{,}5N$. **250.** а) 1,5; б) $\frac{29}{9}$; в) 0,61.
251. а) 4,96; б) прибл. 0,0108; в) 4,8.

252. а) 

; б) $\frac{1}{2}$. **253.** а) 4; б) 4. **254.** 4.

257. а) $\frac{35}{6}$; б) $\frac{665}{324}$; в) $\frac{2555}{1296}$; г) $\frac{2555}{1296}$. **258.** а) $\frac{35}{12}N$. **259.** Прибл. 4,45.
260. 0,05. **261.** а) 32; б) 8; в) 32; г) 2. **262.** а) 75; б) 0,75; в) 12; г) 3.
263. а) 1,72; 0,0036; б) прибл. 68; прибл. 5,6.
264. Прибл. 1,61; прибл. 0,001.
265. Прибл. 0,08; прибл. 0,28.
266. 930,25; 30,5.
267. Прибл. 1,55; прибл. 1,24. **268.** $a = \pm 2{,}5$; $b = 5$.

К главе V

269. а) 0;1; б)

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

270. а) X принимает значения 0,1; Y принимает значения 0, 1, 2;

б)

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

271. а) X принимает значения 0,1; Y принимает значения 2,3; б)

$X \backslash Y$	2	3
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

272. а) 0,25; б) 0,4; в) 0,4; г) 0,3.

273. а) 0; 1; 2; б)

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

274.

X \ Y	0	1	2
0	0	0	1/4
1	0	1/2	0
2	1/4	0	0

275.

X \ Y	0	1	2	3
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$
1	0	0	$\frac{3}{8}$	0
2	0	$\frac{3}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0

276. а) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, $\quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}25 & 0{,}35 & 0{,}4 \end{pmatrix}$;

б) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}24 & 0{,}27 & 0{,}29 \end{pmatrix}$, $\quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0{,}28 & 0{,}19 & 0{,}27 & 0{,}26 \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}5 & 2{,}5 & 3{,}5 \\ 0{,}29 & 0{,}29 & 0{,}21 & 0{,}21 \end{pmatrix}$, $\quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}22 & 0{,}28 \end{pmatrix}$.

277. а) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$, $\quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$;

б) $X \sim \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, $\quad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$;

в) $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\quad Y \sim \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

278.

X \ Y	4	5	6
4	0	0	$\frac{1}{6}$
5	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$X \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad Y \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

279.

Y / X	4	5	6
1	0	1/3	1/6
2	1/6	0	1/3

$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

280. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

281. а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{2}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{7}{36} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & 0 & 6 & 8 & 10 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{13}{36} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

282. а) 0,9; б) 1,2; в) 5,32. **283.** а) 10,5; б) 28; в) 350. **284.** 5.
285. а) $\frac{n}{6}$; б) $\frac{n}{6}$; в) $3{,}5n$. **286.** а) 760,5; б) 253,5. **287.** 79.

289. а) $X+Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; б) $XY \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$; в) $-0{,}04$.
290. а) 1; б) 0,69; в) 1,09. **291.** а) 3,4; б) 0,21; в) 0,84.
292. а) $-0{,}08$; б) 0,3176; в) $-0{,}13$. **293.** а) 12; б) 8; в) -12; г) -24.
294. а) 9; б) 4; в) 0.

К главе VI

297. Зависимы.
298. а) 0,9; б) $-0{,}15$; в) $DX=1$, $DY=0{,}3475$; г) прибл. $-0{,}254$.
299. а) 0,24; б) 0; в) $DX=0{,}24$, $DY=2{,}44$; г) 0.
300. -1. **301.** Верно.
302. **Указание:** Рассмотрите случайную величину X, принимающую значения -1, 0, 1 с равными вероятностями, и величину $Y=X^2$.
303. 0; 0. **304.** Ковариация $\frac{35}{12}$, коэффициент корреляции $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
305. а) $-\frac{35}{12}$, -1; б) -2, -1; в) 1,25, 1.

К главе VII

306. а) 1,25; б) 0,3125. **307.** б) 2; в) 2. **308.** б) 6; в) 30. **309.** $\frac{10}{3}$.
310. Прибл. 8 лет и 4 месяца.

К главе VIII

311. 540. **312.** 1 728 000. **313.** а) 81; б) 45; в) 54; г) 36.
314. а) 450; б) 648; в) 450; г) 90; д) 360; е) 450; ж) 84. **315.** 6.
317. а) 6; б) 10; в) 28; г) 66; д) $\frac{n(n-1)}{2}$. **318.** а) 20; б) 324; в) $\frac{n(n-3)}{2}$.
319. 42. **320.** 28. **321.** а) 12; б) 12. **322.** а) 12; б) 24; в) 7. **323.** 24.
324. 512. **325.** 6. **326.** 24. **327.** 4096. **328.** $8 \cdot 10^6$. **329.** 2^{60}.
330. а) 2^{128}; б) 39. **331.** а) 2187; б) 7^7; в) n^7.
332. а) 2184; б) 823 536; в) $n^7 - n$. **333*.** $\frac{n^7-n}{7}$.
334*. **Указание:** число способов покрасить лошадок в задаче 333, очевидно, целое.
335. 720. **337.** 5040. **338.** а) 33!; б) 26!. **339.** 21 531 121 920. **340.** 24.
341. 6. **342.** 40 320. **343.** а) 1; б) 1; в) n; г) n.
345. а) 15 и 15; б) 35 и 35; в) 84 и 84. **348.** 35.
349. а) 4; б) 10; в) 56; г) 220; д) C_n^3. **350.** См. предыдущую задачу.
351. а) 6; б) 10; в) 28; г) 66; д) C_n^2. **353.** а) 15; б) 126; в) 495; г) 1365; д) C_n^4.
354. 210. **355.** 120. **356.** а) 6; б) 10; в) 15; г) 36; д) $\frac{n(n-1)}{2}$. **357.** 53 130.
358. 210. **359.** 126.
360. а) 10; б) 5; в) 15; г) **указание:** если сложить число способов выбрать четырёх чёрных ворон и четырёх ворон, среди которых есть белая, получится общее число способов выбрать четырёх ворон; поэтому сумма двух первых чисел равна третьему.
361. а) C_{99}^{44}; б) C_{99}^{45}; в) C_{100}^{45}. **363*.** 176 400. **364*.** 36. **365*.** 55.
366*. 91. **367*.** а) 322 560; б) $(C_n^k)^2 \cdot k!$. **369.** а) 20, 28, 126, 210; б) 16; в) 0.
370. а) 165; б) 792; в) 495; г) 220. **371.** а) 1287; б) 715.
373. а) 1; б) 5; в) 10; г) 10; д) 5; е) 1. **374.** C_n^k. **375.** а) 1; б) 1.
376. а) 8; б) 16.
377. а) $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$;
б) $y^4 + 8y^3 + 24y^2 + 32y + 16$;
в) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$;
г) $x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$.
380*. 2.
382. а $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$;
б) $y^6 - 6y^5 + 15y^4 - 20y^3 + 15y^2 - 6y + 1$;
в) $z^4 + 8z^3 + 24z^2 + 32z + 16$;
г) $m^7 - 14m^6 + 84m^5 - 280m^4 + 560m^3 - 672m^2 + 448m - 128$.

383. 1. **384*.** 1.

К главе IX

385. УУУ, НУУ, УНУ, УУН, ННН, ННУ, НУН, УНН.
386. а) 16; б) 32. **387.** УУУНН, УУУНУ, УУУУН, УУУУУ.

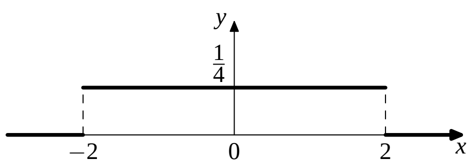
389.

Число успехов	0	1	2	3	4
Число благоприятствующих элементарных событий	1	4	6	4	1

391. а) $\frac{3}{4}$; б) 0,98; в) $\frac{5}{7}$; г) 0,17.
392. а) 0,25; б) $\frac{1}{16}$; в) $\frac{3^{29}}{4^{30}}$; г) $\frac{3^{28}}{4^{30}}$.
393. а) УУНН, УНУН, УННУ, НУУН, НУНУ, ННУУ.
394. а) 28; б) 28; в) 56; г) 56. **395.** а) 1; б) 10; в) 35; г) 84; д) C_n^3.
396. Поровну. **397.** а) 4; б) 6; в) 8; г) 11; д) m.
399. а) $C_n^2+C_n^3$; б) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+C_n^4+C_n^5$; в) $C_n^4+C_n^6+C_n^9$; г) $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}+C_n^{n-3}$; д) ответ тот же, что и в предыдущем пункте.
400*. а) 134; б) 134. **401.** а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{16}$.
402. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{35}{128}$; г) $\frac{21}{128}$; д) $\frac{7}{32}$; е) $\frac{C_n^3}{2^n}$.
403. а) Прибл. 0,054; б) прибл. 0,0006; в) прибл. 0,402; г) прибл. 0,00002; д) прибл. 0,201; е) прибл. 0,335.
404. а) 0,1792; б) 0,5248; в) 0,8704; г) 0,9744.
405. а) $\frac{40}{243}\approx 0{,}165$; б) $\frac{10}{243}\approx 0{,}041$; в) $\frac{192}{243}\approx 0{,}790$; г) $\frac{131}{243}\approx 0{,}539$.
406. а) $\frac{5}{16}=0{,}3125$; б) $\frac{25}{32}\approx 0{,}781$; в) $\frac{15}{32}\approx 0{,}469$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{15}{32}\approx 0{,}469$.
408. 10. **409.** б. **410.** 35. **411.** а) 40; б) 20. **412.** 4. **413.** 0,45.
415. Увеличивается. **416.** npq. **417.** $\frac{1}{2}$. **418.** 22,75, прибл. 4,77.
419. а) 3000; б) 1875. **420.** а) 21; б) 210; в) 525. **421*.** $p=\frac{1}{2}$.

К главе XI

422.



423. а) 0,5; б) 1; в) 0,5; г) 0,75. **424.** $\frac{1}{6}$. **425.** а) 0,3; б) 0,3; в) 0,5; г) 0,2.

К главе XII

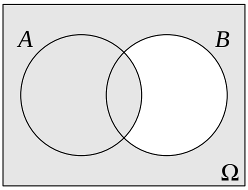
426. а) Прибл. 0,9544; б) прибл. 0,6826; в) прибл. 0,9974; г) прибл. 0,4772.
427. а) Прибл. 0,0792; б) прибл. 0,6913; в) прибл. 0,018; г) прибл. 0,4974.
428. а) Прибл. 0,0088; б) прибл. 0,0997; в) прибл. 0,8953; г) прибл. 0,3925.
429. а) Прибл. 0,1587; б) прибл. 0,3821; в) прибл. 0,3446; г) прибл. 0,4404.
430. а) Прибл. 0,9772; б) прибл. 0,1587; в) прибл. 0,5986; г) прибл. 0,9112.
431. а) Прибл. 0,3174; б) прибл. 0,0456; в) прибл. 0,0027; г) прибл. 0,9891.
432. а) Прибл. 0,6247; б) прибл. 0,4772; в) прибл. 0,2295; г) прибл. 0,6912.
433. а) Прибл. 0,0228; б) прибл. 0,0624; в) прибл. 0,2182; г) прибл. 0,8643.
434. а) 0,5; б) прибл. 0,0014; в) прибл. 0,7351; г) прибл. 0,0669.
435. а) Прибл. 0,6915; б) прибл. 0,1587; в) прибл. 0,2778; г) прибл. 0,5485.
437. а) Прибл. 0,3174; б) прибл. 0,0455; в) прибл. 0,1336; г) прибл. 0,0124; д) прибл. 0,0027.
438. а) Прибл. 0,9876; б) прибл. 0,0062; г) прибл. 0,3829.
439. Прибл. 0,0228.
440. Прибл. 0,8413.

К главе XIII

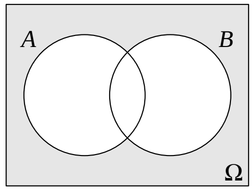
441. а) $p(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\leqslant 0, \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, & \text{при } x>0. \end{cases}$; б) прибл. 0,2865.
442. б) Прибл. 0,5654.
443. **Указание.** Рассмотрите условные вероятности событий, о которых рассуждает Василий Петрович.

Задачи для повторения, проверочных и самостоятельных работ

1. Непрерывное. **2.** Дискретное. **3.** 0,8. **4.** $\frac{2}{9}$.
5. ООРР, ОРОР, ОРРО, РООР, РОРО, РРОО.
6. ОООО, ОООР, ООРО, ОРОО, РООО. **7.** $\frac{5}{18}$. **8.** $\frac{44}{45}$. **9.** $\frac{5}{36}$. **10.** $\frac{5}{9}$.

11. 

.

12. 

.

13. $(1,1)$; $(1,3)$; $(1,5)$; $(2,1)$; $(2,3)$; $(3,1)$; $(3,3)$; $(4,1)$; $(5,1)$.

14. $(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(1,4)$; $(3,1)$; $(3,2)$. **15.** а) $\frac{7}{20}$; б) $\frac{1}{4}$. **16.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{4}{15}$.

17. 0,47. **18.** 0,812. **19.** Три. **20.** Два. **21.** $\frac{2}{3}$. **22.** $\frac{1}{3}$. **23.** 0,5. **24.** 0,75. **25.** Если бы события были независимыми, то вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равнялась бы $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09 \neq 0{,}13$.

26. 0,96. **27.** а) 0,032; б) 0,16. **28.** а) 0,21; б) 0,7. **29.** $\frac{18}{343}$. **30.** $\frac{108}{343}$.

31. $\frac{3}{4}$. **32.** $\frac{3}{7}$. **33.** а) 0,99; б) $\frac{1}{3}$. **34.** а) 0,016; б) прибл. 0,598. **35.** 0,35.

36. 0,48. **37.** 1, 10 и 13. **38.** -3, 1 и 7. **39.** -2, -1, 0, 1, 3. **40.** 2, 3, 4, 5, 6.

41. 0,7. **42.** 0,4. **43.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; 0,5. **44.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$; 0,5.

45. 1. **46.** $-\frac{2}{5}$. **47.** а) 5; б) 6; в) 5; г) 45. **48.** а) 5; б) 7; в) 6; г) 1,5. **49.** 0,5.

50. $\frac{5}{18}$. **51.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. **52.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

53.

X \ Y	-2	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

54.

X \ Y	-1	1	2
2	0,08	0,1	0,02
4	0,32	0,4	0,08

55. -1. **56.** 1. **57.** а) 0,25; б) $\frac{1}{2}$. **58.** а) $\frac{35}{12}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **59.** а) 0,64; б) нет.

60. а) 0; б) нет. **61.** а) $\frac{10}{3}$; б) $\frac{70}{9}$. **62.** а) 2,5; б) 3,75. **63.** 0,936. **64.** 0,64.

65. $\frac{2}{9}$. **66.** $\frac{1}{6}$. **67.** $\frac{8}{729}$. **68.** $\frac{27}{1024}$. **69.** 28. **70.** 35. **71.** а) $\frac{15}{64}$; б) $\frac{21}{32}$.

72. а) $\frac{25}{216}$; б) $\frac{125}{144}$. **73.** $\frac{1}{2^{76}}C_{76}^{38}$. **74.** $\frac{1}{2^{80}}C_{80}^{40}$. **75.** $\frac{50}{3}$ и $\frac{5\sqrt{5}}{3}$. **76.** 30 и $2\sqrt{3}$.

77. 0,75. **78.** 0,8. **79.** а) 0; б) $\frac{1}{3}$. **80.** а) 0,25; б) 0. **81.** а) 0,35; б) 0,65.

82. а) 0,75; б) 0,6. **83.** Прибл. 0,8064. **84.** Прибл. 0,516. **85.** Прибл. 0,5. **86.** Прибл. 0,95. **87.** $1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}49$. **88.** $e^{-\frac{6}{5}} \approx 0{,}3$.

Ответы к заданиям контрольных работ

Контрольная работа 1

Вариант 1. 1. $\frac{1}{9}$. **2.** 0,9964. **3.** а) 0,3; б) 0; в) 2,2.
4. а) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; б) независимы. **5.** а) 0,24; б) 0,936. **6.** $\frac{1}{49}$.

Вариант 2. 1. $\frac{1}{6}$. **2.** 0,0064. **3.** а) 0,6; б) 0; в) 5,6.
4. а) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; б) не являются независимыми. **5.** а) 0,063; б) 0,91. **6.** $\frac{12}{49}$.

Контрольная работа 2

Вариант 1. 1. 0,1323. **2.** 90; 9. **3.** 0,4. **4.** Прибл. 0,036. **5.** 0,8.
6. $1 - e^{-0{,}25} \approx 0{,}22$.
Вариант 2. 1. 0,3456. **2.** 320; 16. **3.** 0,6. **4.** Прибл. 0,134. **5.** 0,7.
6. $e^{-0{,}5} \approx 0{,}61$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1. 1. $\frac{1}{6}$. **2.** 0,0064. **3.** 0,026. **4.** 1; 1,2. **5.** Прибл. 0,98. **6.** $\frac{2}{9}$.

Вариант 2. 1. $\frac{5}{18}$. **2.** 0,4096. **3.** 0,987. **4.** -2; 1,4. **5.** Прибл. 0,84. **6.** $\frac{1}{2}$.

Оглавление

Юрий Николаевич Тюрин
Алексей Алексеевич Макаров
Иван Ростиславович Высоцкий
Иван Валериевич Ященко

Теория вероятностей и статистика

Экспериментальное учебное пособие
для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений

Художник Д. А. Котова
Компьютерная графика: Д. Б. Житницкий, О. П. Лехтонен

Подписано к печати 16.01.2014 г. Формат $70 \times 90/16$. Печать офсетная.
Объем 15,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8».
Тел. 8 (495) 363-48-86. http://capitalpress.ru