И. Р. ВЫСОЦКИЙ
И. В. ЯЩЕНКО

МАТЕМАТИКА

# ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

# 7–9 классы

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Учебник

В двух частях

**Часть 2**

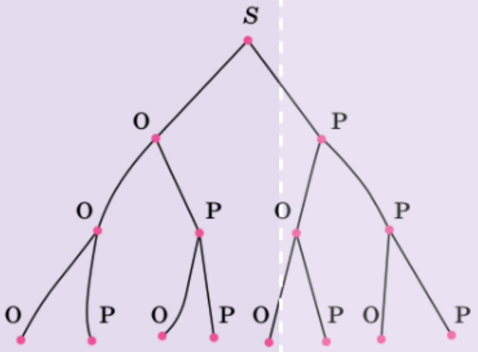
Под редакцией И. В. Ященко

Допущено Министерством просвещения Российской Федерации

Москва
«Просвещение»
2023

# X Деревья

В этой главе мы продолжим разговор о графах. Познакомимся со свойствами специальных графов — деревьев, и увидим, как с их помощью можно изучать случайные эксперименты.



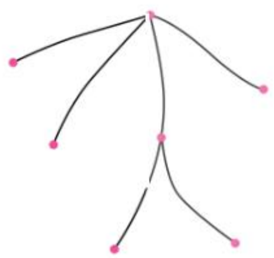
# 46 Деревья

Напомним, что такое цепь и цикл в графе. Цепь — это простой путь, то есть путь, в котором вершины не повторяются. Раз не повторяются вершины, то и рёбра тоже не повторяются (рис. 1, *б*). Цикл в графе — это замкнутый путь, в котором не повторяются рёбра и не повторяются промежуточные вершины.

Очень интересны и полезны графы, в которых нет циклов. Если в связном графе нет циклов, то такой граф называют **деревом**.

**Дерево** — связный граф без циклов.

Цепь тоже является деревом, поскольку в цепи нет циклов. И даже граф, состоящий из одной-единственной вершины без рёбер, также можно рассматривать как простейшее дерево (рис. 1, *в*).



а) Дерево, в котором 7 вершин

б) Цепь — это дерево



в) Простейшее дерево — одна вершина

Рисунок 1

**ПРИМЕР 1.** На рисунке 2 показана схема водоснабжения в небольшом посёлке. Трубы идут от водонапорной башни и ветвятся, пролегая вдоль улиц. Из больших труб отходят малые к домам. Граф водопровода — дерево. Здесь можно выделить начальную вершину — водонапорную башню.

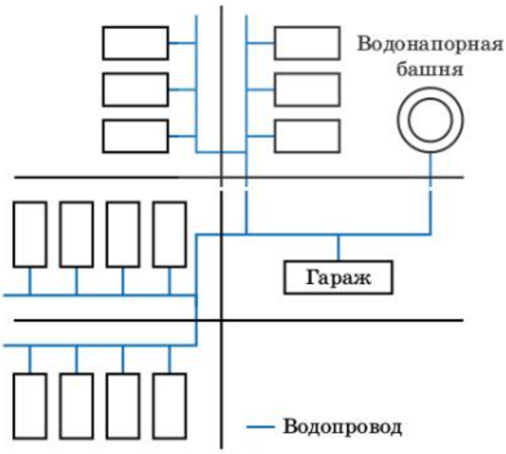



Рисунок 2

**ПРИМЕР 2.** Возьмём симметричную монету и подбросим её 3 раза. Чтобы изобразить этот случайный опыт, построим дерево. От начальной вершины $S$ нарисуем ветви вниз к вершинам, которые обозначим О (орёл) и Р (решка) — это результаты первого броска. От каждой из них идут ещё два ребра вниз к вершинам О и Р, изображающим результаты второго броска. Точно так же покажем результаты третьего броска (рис. 3).

Получилось дерево случайного эксперимента. В этом дереве восемь цепей, ведущих из начальной вершины $S$ в концевые вершины:

$$SOOO,\ SOOP,\ SOPO,\ SOPP,$$
$$SPOO,\ SPOP,\ SPPO \text{ и } SPPP.$$

Каждая цепь изображает одно из восьми возможных элементарных событий в этом случайном опыте.

В примерах 1 и 2 понятно, какую вершину следует выбрать в качестве начальной, или **корневой**, вершины, из которой «растёт» дерево. Вода по трубам течёт из водонапорной башни. Это и есть начальная вершина на схеме водоснабжения (см. рис. 2). Во втором примере начальная вершина изображает начальный момент, когда монету ещё не бросили ни разу. Мы её обозначили буквой $S$ от слова *start*, имея в виду начало случайного опыта.

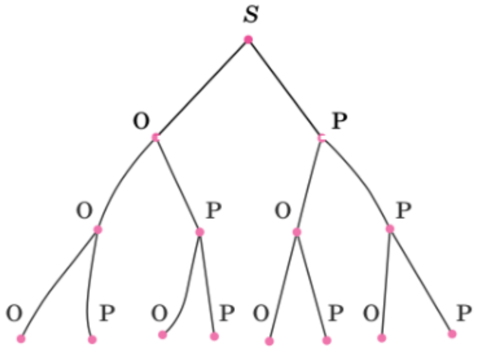


Рисунок 3

Название «дерево» происходит оттого, что цепи «ветвятся», не образуя циклов. Единственная разница — в природе деревья обычно растут снизу вверх, а математические деревья мы рисуем так, как нам удобно.

Бывают **бесконечные деревья**, то есть деревья, в которых бесконечно много вершин и рёбер. Многоточие на рисунке 4 показывает, что дерево простирается вправо до бесконечности.

**ПРИМЕР 3.** Предположим, что кто-то пытается послать СМС из леса, где связь очень плохая. Каждая отдельная попытка может оказаться неудачной, и в таком случае телефон предпримет следующую. Будем считать, что попыток может быть сколько угодно. Такой случайный опыт можно изобразить с помощью бесконечного графа. Начинается граф в вершине $S$, каждая попытка может оказаться неудачной (вершина Н) или удачной (вершина У) (см. рис. 4).

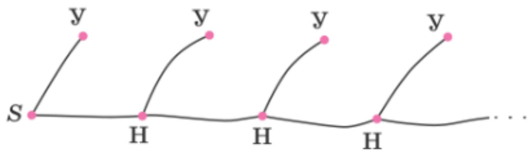


Рисунок 4. **Бесконечное дерево случайного эксперимента**

## Вопросы

**1** Что такое дерево?

**2** Может ли в дереве быть 4 ребра; бесконечно много рёбер?

**3** Бывают ли в дереве петли; цепи; циклы?

## Задачи

**1** Какие из графов на рисунке 5 являются деревьями?

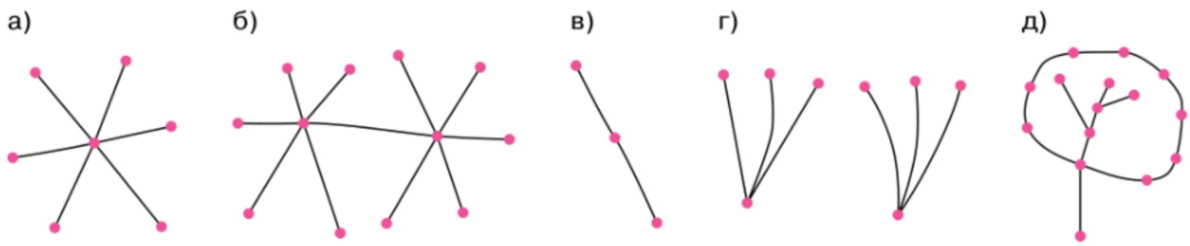


Рисунок 5

**2** Является ли деревом граф дорог в вашем населённом пункте? Постройте в тетради часть этого графа в обоснование своего ответа.

**3** Нарисуйте в тетради какое-нибудь дерево, в котором 7 вершин, причём степень 1 имеют ровно:

а) 2 вершины;

б) 4 вершины;

в) 6 вершин.

**4** В графе рёбрами соединены вершины $A$ и $B$, $B$ и $C$, $A$ и $C$. Является ли этот граф деревом?

**5** План тропинок в парке представляет собой дерево (рис. 6). Ворота в парке обозначены вершиной $S$. Сколько цепей ведёт из вершины $S$:

а) к кафе;

б) к пруду;

в) к саду камней?


Рисунок 6

**6** Придумайте какой-нибудь случайный опыт, моделью которого служит дерево, показанное на рисунке 7.

**7** Приведите пример случайного опыта, для изображения которого требуется дерево с бесконечным числом вершин.

**8** Придумайте и нарисуйте в тетради:

а) два неодинаковых дерева с четырьмя вершинами;

б) три неодинаковых дерева с пятью вершинами.

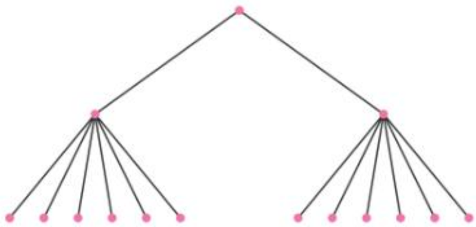


Рисунок 7

# 47* Свойства деревьев

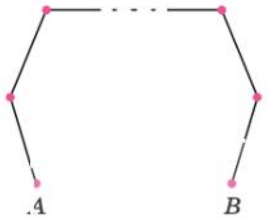
Поскольку дерево — связный граф, из любой его вершины можно пройти по рёбрам в любую другую вершину. Из-за отсутствия циклов это можно сделать единственным способом. Значит, верна следующая теорема.

**Теорема.** Любые две вершины в дереве соединены единственной цепью.

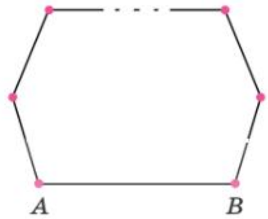
Из этой теоремы следует полезное свойство.

**Свойство 1.** Если из дерева удалить ребро, то граф перестанет быть связным.

**Доказательство.** Докажем это свойство от противного. Предположим, что удалось удалить некоторое ребро $AB$, но граф остался связным. Значит, в нём есть цепь, соединяющая вершины $A$ и $B$ (рис. 8, *а*). Вернём ребро $AB$ на место. Получится исходный граф, но теперь в нём есть цикл (рис. 8, *б*). Противоречие. Значит, при удалении любого ребра дерево теряет связность.



а) После удаления ребра $AB$ граф остался связным



б) После возвращения ребра $AB$ образовался цикл

Рисунок 8

**Концевой (висячей) вершиной** называется вершина, из которой выходит ровно одно ребро, то есть вершина степени 1.

В примере 1 в п. 46 концевыми вершинами являются дома, к которым подведён водопровод, а в примере 2 концевые вершины — это результаты последнего броска монеты. Кажется, что раз в дереве нет циклов, то у дерева обязательно должны быть концевые вершины. И это до определённой степени верно. Но есть два исключения. Во-первых, концевых вершин нет у дерева без рёбер. Во-вторых, бывают бесконечные деревья. Они тоже могут не иметь концевых вершин. На рисунке 9 показано бесконечное дерево без концевых вершин[1].

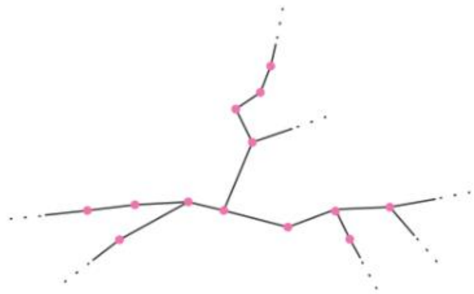


Рисунок 9. **Бесконечное дерево без концевых вершин**

Если дерево конечно и имеет хотя бы 1 ребро, то концевые вершины у него есть.

**Свойство 2.** Если в дереве конечное число вершин и есть хотя бы одно ребро, то в таком дереве есть концевая вершина.

**Доказательство.** Предположим, что все вершины имеют степень 2 или выше. Тогда в каждую вершину можно «войти» по какому-то ребру и «выйти» из неё по другому ребру, поскольку петель нет. Начнём с какой-то вершины и будем строить путь без повторяющихся рёбер. По условию вершин конечное число, поэтому рано или поздно какая-то вершина в нашем пути повторится и получится цикл. Но ведь в дереве циклов нет.

Противоречие. Предположение неверно. Значит, в дереве есть вершины степени меньше, чем 2. Вершин степени 0 нет, поскольку граф связен и в нём есть хотя бы одно ребро. Стало быть, найдётся вершина степени 1, т. е. концевая вершина.

**Свойство 3.** В конечном дереве число рёбер на 1 меньше числа вершин.

---

[1] Не нужно думать, что если дерево бесконечно, то у него обязательно нет концевых вершин. Мы видели бесконечное дерево (см. рис. 4), у которого концевые вершины есть, и даже бесконечно много.

**Доказательство.** Покажем это. Если рёбер нет, то дерево состоит из единственной вершины. Значит, в этом дереве вершин на одну больше, чем рёбер: $1 - 0 = 1$.

Пусть теперь в графе $n$ рёбер ($n > 0$). Мы знаем, что в таком дереве есть концевая вершина. Удалим её вместе с входящим в неё ребром. Снова получится дерево. Будем удалять концевые вершины вместе с входящими в них рёбрами до тех пор, пока не останется дерево, состоящее из единственной вершины.

Мы удалили все $n$ рёбер и $n$ вершин. Осталась одна вершина, но рёбер больше нет. Следовательно, в исходном дереве было $n + 1$ вершин. То есть вершин было на одну больше, чем рёбер. Свойство доказано.

## Вопросы

1. В дереве 10 вершин, две из которых — вершины $X$ и $Y$. Сколько существует цепей, ведущих из $X$ в $Y$?
2. Какой может быть степень начальной вершины дерева; концевой вершины?
3. Может ли в дереве вершин быть больше, чем рёбер; рёбер быть больше, чем вершин?

## Задачи

**9** Сколько концевых вершин в дереве на рисунке 10?

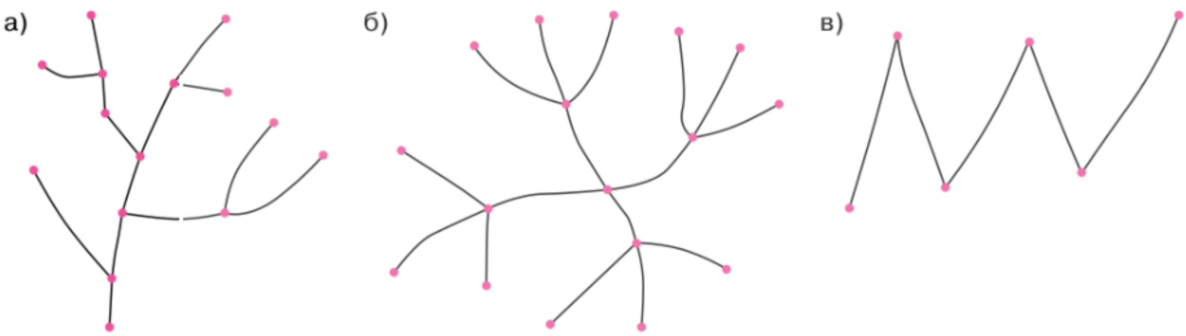



Рисунок 10

**10** В дереве 4 вершины. Сколько концевых вершин в нём может быть? Приведите пример дерева для каждого возможного значения.

**11** В дереве 100 вершин. Какое в нём может быть: а) наибольшее число концевых вершин; б) наименьшее число концевых вершин?

**12** На рисунке 11 показано дерево. Рассмотрите цепи, соединяющие начальную вершину $S$ с концевыми. Сколько таких цепей имеют длину 2; длину 3; длину 4?


Рисунок 11

**13** Нарисуйте какое-нибудь дерево, в котором из начальной вершины к концевым ведут:

а) ровно 3 цепи длины 2;

б) 2 цепи длины 1 и 4 цепи длины 2.

**14** Сколько вершин в дереве, в котором:

а) 14 рёбер; б) 27 рёбер; в) 31 ребро?

**15** Сколько рёбер в дереве, в котором:

а) 87 вершин; б) 487 вершин; в) 317 вершин?

**16** Будет ли связным граф, который получится из дерева, если из него удалить:

а) ребро, связывающее две неконцевые вершины;

б) концевую вершину вместе с выходящим из неё ребром?

**17** Изобразите какое-нибудь дерево, в котором:

а) 8 вершин, 5 из них концевые;

б) 10 вершин, 6 из них концевые.

**18** Изобразите какое-нибудь дерево, в котором:

а) 4 вершины степени 3 и 6 вершин степени 1;

б) 2 вершины степени 4, 2 вершины степени 3 и 8 вершин степени 1.

## 48 Дерево случайного эксперимента

Мы уже видели, как можно построить дерево случайного эксперимента, в котором монету бросают 3 раза. Мы даже построили дерево бесконечного эксперимента, в котором мобильный телефон пытается передать СМС из глухого леса.

Многие случайные эксперименты удобно рассматривать, изобразив их с помощью дерева. При этом стрелки на рёбрах можно не рисовать, поскольку ясно, какая вершина выбрана в качестве начальной: все рёбра направлены от неё к концевым вершинам. Мы будем обозначать начальную вершину дерева случайного опыта буквой $S$.

**ПРИМЕР 1.** На фабрике керамической посуды производят тарелки. Каждая новая тарелка может иметь дефект (пережог, деформацию, трещину), а может оказаться качественной. Поэтому все тарелки проходят контроль качества. Система контроля выявляет почти все дефектные тарелки, но иногда может случайно не заметить дефект. Более того, редко, но случается, что система контроля качества по ошибке бракует тарелку без дефекта. Изобразим весь этот процесс с помощью дерева (рис. 12). Начнём с вершины $S$, построим рёбра к вершинам $A$ и $B$, которые изображают события «качественная тарелка» и «тарелка с дефектом». Затем от вершин $A$ и $B$ проведём рёбра к вершинам, изображающим события $R$ «тарелка забракована» и $Q$ «тарелка не забракована». При этом вершины $R$ и $Q$ нарисуем по 2 раза: один раз для случая, когда тарелка хорошая, а второй раз для дефектной тарелки.

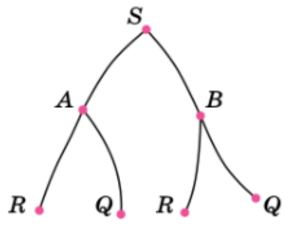


Рисунок 12

Получившееся дерево обладает интересным свойством: у него из каждой неконцевой вершины ($S$, $A$ и $B$) исходит ровно два ребра. Такие деревья называют двоичными или **бинарными**. Деревья на рисунках 3 и 4 (с. 5) также бинарные.

Какие события являются элементарными в этом опыте? Это события, которые изображены цепями, идущими от точки $S$ к концевым вершинам. Например, элементарное событие «качественная тарелка забракована» изображается цепью $SAR$. Всего элементарных событий четыре: помимо цепи $SAR$ есть ещё цепочки $SAQ$, $SBR$ и $SBQ$.

Не следует думать, что дерево любого случайного опыта обязательно бинарное.

**ПРИМЕР 2.** Три друга — Андрей (А), Борис (Б) и Владимир (В) — в случайном порядке встают в очередь. Изобразим дерево этого случайного опыта. Начнём с вершины $S$. На первое место можно поставить одного из троих, на второе — одного из двоих, а в конец очереди — оставшегося. Следуя этому рассуждению, строим дерево (рис. 13). Оно получается не бинарное: из вершины $S$ выходит три ребра, из трёх вершин — по два ребра, а из шести — по одному.

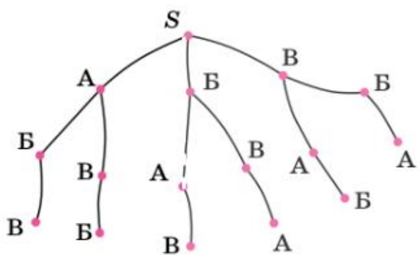


Рисунок 13

Мы знаем, что в таком эксперименте $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ элементарных событий. В дереве все эти элементарные события изображаются цепями, ведущими от $S$ к концевым вершинам дерева: $S$АБВ, $S$АВБ, $S$БАВ, $S$БВА, $S$ВАБ И $S$ВБА. Каждая из них определяет порядок, в котором А, Б и В выстроились друг за другом.

В дереве случайного опыта элементарные события изображаются цепями, идущими от начальной вершины к концевым. Поэтому количество концевых вершин в дереве случайного опыта равно числу элементарных событий.

## Вопросы

**1** Сколько концевых вершин в дереве, изображающем случайный опыт с пятью элементарными событиями?

**2** Опишите словами элементарные события, изображённые цепями $SAQ$, $SBR$ и $SBQ$ на рисунке 12.

**3** Какая цепь в дереве на рисунке 12 соответствует событию «система контроля пропустила бракованную тарелку»?

## Задачи

**19** На рисунке 14 изображено дерево некоторого случайного опыта с началом в точке $S$. Сколько элементарных событий в этом опыте?

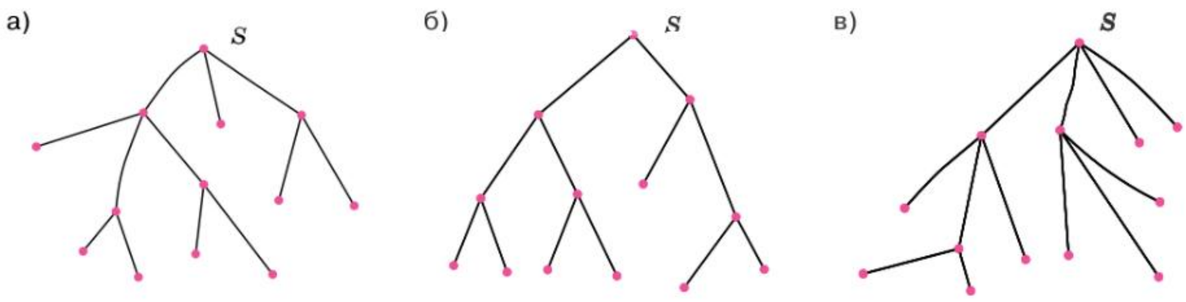


Рисунок 14

**20** На рисунке 15 показано дерево случайного опыта. Сколько элементарных событий в этом опыте благоприятствует событию $A$; событию $B$?

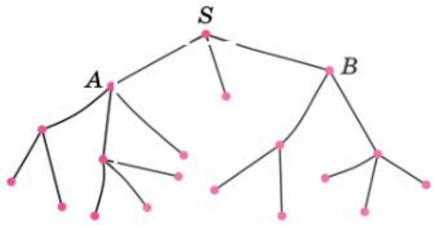



Рисунок 15

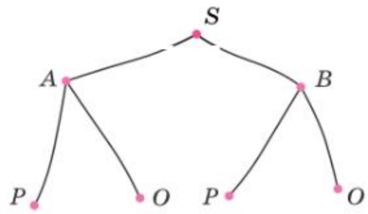



Рисунок 16

**21** Всем пациентам с подозрением на тропическую лихорадку делают тест. Если тест выявляет вирус лихорадки, то результат называется положительным. В редких случаях тест ошибочно показывает наличие вируса у здорового человека, и наоборот — отсутствие вируса у того, кто болен.

Событие «пациент болен» обозначим буквой $B$, а событие «пациент здоров» — буквой $A$. Событие «результат положительный» обозначим буквой $P$, а противоположное — буквой $O$. Сформулируйте словами событие, которое в дереве случайного опыта (рис. 16) изображается цепью:

а) $SAO$; б) $SBO$; в) $SAP$.

**22** На рисунке 17 изображено дерево случайного опыта с начальной вершиной $S$. События $C$ и $D$ показаны закрашенными фигурами. Перечислите элементарные события опыта, благоприятствующие:

а) событию $C$; в) событию $\overline{D}$;

б) событию $C \cap D$; г) событию $\overline{C} \cap \overline{D}$.

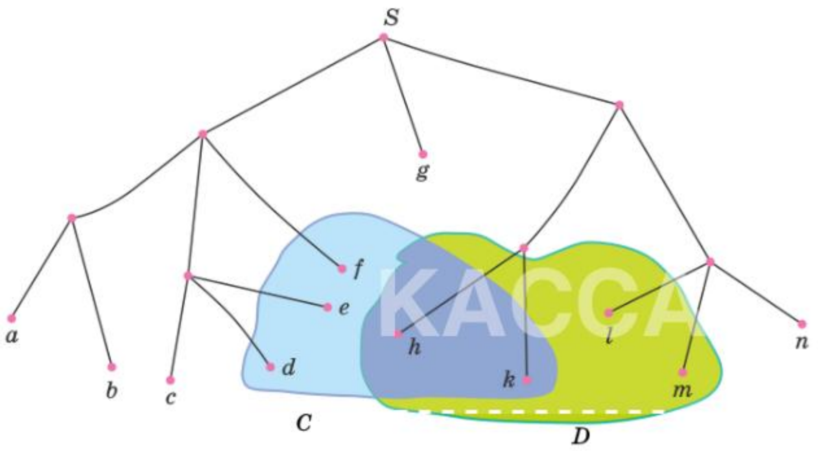



Рисунок 17

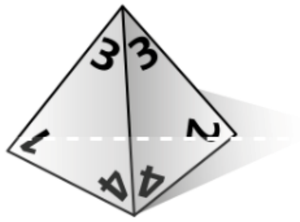
**23** Постройте дерево случайного опыта, в котором монету бросают 3 раза. Отметьте в этом дереве цепочки, изображающие элементарные события, благоприятствующие событию:

а) «во второй раз выпал орёл»;

б) «решка выпала ровно 2 раза»;

в) «орлов выпало больше, чем решек».

**24** У правильного тетраэдра (треугольной пирамиды) четыре вершины. Вершины помечены числами 1, 2, 3 и 4. Тетраэдр бросают два раза. Постройте дерево этого случайного опыта. Отметьте в этом дереве цепи, изображающие элементарные события, благоприятствующие событию:



а) «в первый раз выпало 3 очка»;

б) «в первый раз выпало чётное число очков»;

в) «сумма выпавших очков делится на 3».

**25** У стрелка в тире 5 пуль для пневматического ружья. Если стрелок попал в мишень, то больше он не стреляет, а если промахнулся, то продолжает стрелять, пока остаются пули. Постройте дерево этого случайного опыта. Отметьте в этом дереве событие:

а) «стрелок попал в мишень»;

б) «для поражения мишени понадобилось не более трёх пуль»;

в) «всего было сделано 2 выстрела».

# XI Математические рассуждения

Мы знакомы с математическими утверждениями. Из двух или нескольких простых утверждений можно строить более сложные утверждения с помощью логических союзов «и» и «или». Они очень похожи по своему смыслу на союзы, которые мы используем в повседневной речи.

# 49 Логические союзы «и» и «или»

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим два математических утверждения: «5 больше, чем 2» и «5 больше, чем 7». Первое является истинным высказыванием, а второе — ложным.

Эти два высказывания можно соединить союзом **«и»**. Получится сложное утверждение «(5 больше, чем 2) **и** (5 больше, чем 7)». К сожалению, это ложное высказывание, потому что второе высказывание ложно.

> Чтобы сложное утверждение «$A$ **и** $B$» было истинным, нужно, чтобы **обе** части этого утверждения были истинны.

Логический союз **«и»** не зря так называется. Его действие очень похоже на работу союза **«и»** в русском языке.

Между двумя утверждениями можно поставить союз **«или»**. Получится сложное утверждение «(5 больше, чем 2) **или** (5 больше, чем 7)». Оно истинно, потому что истинна первая часть, а союз **«или»** не требует, чтобы были истинны обе части: достаточно одной.

> Чтобы сложное утверждение «$A$ **или** $B$» было истинным, нужно, чтобы **хотя бы одна** часть этого утверждения была истинна.

Поясним слова «хотя бы одна». Они значат, что утверждение «$A$ **или** $B$» будет истинным высказыванием, если истинным является только утверждение $A$, только утверждение $B$ или оба сразу.

Иногда сложные утверждения не содержат в явном виде союзов **«и»** и **«или»**, но подразумевают один из них.

**ПРИМЕР 2.** В утверждении «15 делится на 5, а также на 7» союзов **«и»**, **«или»** нет. Но высказывание можно переформулировать:

«(15 делится на 5) **и** (15 делится на 7)».

Ясно, что это высказывание ложно, поскольку ложна его вторая часть.

**ПРИМЕР 3.** Даны два утверждения. Первое утверждение «задача решена». Второе утверждение — отрицание первого: «задача не решена». Что получится, если мы соединим эти утверждения логическими союзами?

Сначала попробуем союз **«и»**. Получится

«(задача решена) **и** (задача не решена)».

Если задача действительно решена, то первая часть — истинное высказывание, а вторая — ложное. Значит, всё сложное утверждение будет ложным. Если же задача не решена, то ложной будет первая часть, поэтому и в этом случае утверждение окажется ложным.

Таким образом, это сложное утверждение с союзом **«и»** будет ложным независимо от того, решена или не решена задача.

Так можно поступить с любым утверждением $A$.

> Утверждение «$A$ **и** (**не** $A$)» является ложным высказыванием независимо от того, истинно или ложно утверждение $A$.

Теперь попробуем соединить утверждения союзом **«или»**. Получится

«(задача решена) **или** (задача не решена)».

Обе части этого утверждения не могут быть одновременно ложными, одна из них обязательно истинная. Значит, всё получившееся сложное утверждение является истинным высказыванием.

Утверждение «$A$ **или** (**не** $A$)» является истинным высказыванием независимо от того, истинно или ложно утверждение $A$.

**ПРИМЕР 4.** Рассмотрите фигуры на рисунке 18.


Рисунок 18

Истинно или ложно утверждение?

1) «Фигура 1 является треугольником **или** фигура 1 является квадратом»;
2) «Фигура 2 является треугольником **или** квадратом»;
3) «Фигура 3 является треугольником **или** квадратом».

Мы сказали, что логические союзы похожи на союзы, которые мы используем в русском языке. На самом деле, в повседневной речи действие союзов во многом определяется контекстом и ситуацией. Можно сказать, что на первое в школьной столовой щи **и** борщ. Или можно сказать, что меню предлагает щи **или** борщ. В обоих случаях мы поймём правильно — можно взять что-то одно.

Другой пример. Мы можем написать, что уравнение $(x-3)(x-4)=0$ имеет корни 3 и 4, понимая, что $x$ должен равняться какому-то одному из этих чисел, а не обоим сразу. Казалось бы, правильнее поставить союз **«или»**. Но не обязательно: союз **«и»** здесь выглядит более естественно и не мешает понимать сказанное.

## Вопросы

**1** Высказывание «$A$ **или** $B$» ложно. Что можно сказать об истинности утверждений $A$ и $B$?

**2** Высказывание «$A$ **или** $B$» истинно. Что можно сказать об истинности утверждений $A$ и $B$?

**3** Придумайте утверждения $A$ и $B$ так, чтобы оба утверждения

«$A$ **или** $B$» и «$A$ **и** $B$»

оказались истинными высказываниями.

**4** Придумайте утверждения $A$ и $B$ так, чтобы оба утверждения

«$A$ **или** $B$» и «$A$ **и** $B$»

оказались ложными высказываниями.

## Задачи

**26** Дан угол. Известно, что истинно утверждение «величина данного угла больше 23° **и** величина данного угла меньше, чем 45°». Какие из следующих высказываний истинны, а какие — могут оказаться ложными?

а) «Величина данного угла больше 17°»;

б) «Данный угол — острый»;

в) «Величина данного угла больше 30°»;

г) «Величина данного угла не меньше, чем 24°».

**27** Известно, что в доме, где живёт Костя, больше этажей, чем в доме, где живёт Олег. В доме, где живёт Таня, меньше этажей, чем в доме, где живёт Олег, а в доме, где живёт Федя, больше этажей, чем в доме, где живёт Таня. Укажите, какие из следующих утверждений являются истинными высказываниями.

а) «Дом, где живёт Таня, самый малоэтажный из всех четырёх»;

б) «В доме, где живёт Олег, меньше этажей, чем в доме, где живёт Федя»;

в) «В доме, где живёт Костя, этажей больше, чем в доме, где живёт Таня»;

г) «Среди этих четырёх домов нет двух с одинаковым количеством этажей».

**28** Даны два утверждения: «Число $X$ больше, чем 10» и «Число $X$ меньше, чем 20». Могут ли оба утверждения оказаться:

а) истинными высказываниями; б) ложными высказываниями?

**29** Даны два утверждения: $C$ — «Данное число простое» и $B$ — «Данное число чётное».

а) Сформулируйте утверждение «$C$ **и** $B$». Может ли оно быть истинным?

б) Сформулируйте утверждение «$C$ **или** $B$». Может ли оно быть ложным?

**30** Маша нашла гриб. Мама сказала: «У этого гриба на шляпке чешуйки». Папа сказал: «Этот гриб ядовитый». Составьте из этих утверждений сложное утверждение:

а) с помощью логического союза «**и**»; б) с помощью логического союза «**или**».

**31** Известно, что число $n$ натуральное. Дано утверждение «Число $n$ является квадратом некоторого натурального числа **или** число $n$ не делится на 5». Для каких из предложенных значений $n$ это утверждение ложно?

а) $n = 16$; б) $n = -15$; в) $n = 14$; г) $n = 25$.

**32** Четверо школьников обсуждали ответ к примеру из учебника по математике.

Коля сказал: «Ответ 9».

Роман ответил: «Ответ — простое число».

Катя добавила: «Ответ — чётное число».

Наташа сказала: «Это число делится на 15».

Оказалось, что один мальчик и одна девочка ответили верно, а двое детей ошиблись. Каков ответ задачи на самом деле?

# 50* Отрицание сложных утверждений

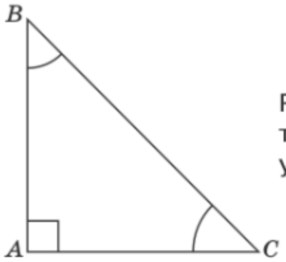
Рассмотрим какое-нибудь утверждение с логическим союзом «**и**». Например: «Сегодня на небе ясно **и** дует ветерок». Чтобы оно стало истинным высказыванием, должны быть выполнены оба условия: и про небо, и про ветер. Как сформулировать отрицание? Достаточно «отменить» только ясное небо или только ветер (можно отменить всё сразу). Если хотя бы одна из частей сложного утверждения с союзом **«и»** станет ложной, ложным станет всё утверждение. Поэтому отрицание будет выглядеть так:

«(сегодня небо не ясное) **или** (нет ветра)».

К каждой из частей сложного утверждения мы добавили отрицание, а союз **«и»** заменили союзом **«или»**. Получилось отрицание сложного утверждения.

Отрицанием к утверждению «$A$ **и** $B$» является утверждение «(**не** $A$) **или** (**не** $B$)».

**ПРИМЕР 1.** Построим отрицание утверждения $T$: «В треугольнике $ABC$ есть прямой угол **и** два угла равны между собой». Такой треугольник существует (рис. 19), поэтому это утверждение может быть истинным.




Равнобедренный прямоугольный треугольник. Для него истинно утверждение $T$

Рисунок 19

Построим отрицание к утверждению $T$. Сначала запишем утверждение $T$ более формально:

«(в треугольнике $ABC$ есть прямой угол)
**и**
(в треугольнике $ABC$ два угла равны между собой)».

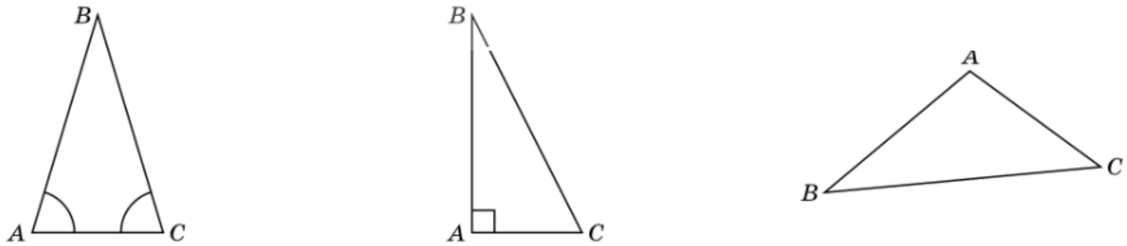
Теперь ясно, как построить отрицание:

«(в треугольнике $ABC$ нет прямого угла)
**или**
(в треугольнике $ABC$ никакие два угла не равны)».

Это утверждение можно сформулировать более привычным образом:

«Треугольник $ABC$ не прямоугольный **или** не равнобедренный».

Оно истинно для любого непрямоугольного треугольника и даже для всех прямоугольных, но не равнобедренных (рис. 20).




Равнобедренный, но не прямоугольный

Прямоугольный, но не равнобедренный

Не прямоугольный и не равнобедренный

Рисунок 20. **Для всех этих треугольников истинно утверждение не $T$**

Осталось научиться строить отрицания к сложным утверждениям с союзом **«или»**. Ситуация здесь аналогичная. Нужно построить отрицания к обеим частям и заменить логический союз **«или»** союзом **«и»**.

**ПРИМЕР 2.** Утверждение гласит: «Две **любые** прямые на плоскости пересекаются **или** параллельны». Это утверждение — истинное высказывание. Отрицание говорит:

«На плоскости **найдутся** две прямые,
которые не пересекаются **и** не параллельны».

Это утверждение ложно.

Отрицанием к утверждению «$A$ **или** $B$» является утверждение «(**не** $A$) **и** (**не** $B$)».

Мы знакомы с доказательством от противного. Новые знания позволяют нам обсудить ещё один интересный вид доказательства. Предположим, мы хотим доказать, что некоторый объект обладает либо одним свойством, либо другим. Можно попытаться предположить, что одно из свойств не выполняется и доказать, что в этом случае выполняется второе.

**ПРИМЕР 3.** Если у двух прямых одинаковы угловые коэффициенты, то эти две прямые совпадают или параллельны.

**Доказательство.** Пусть даны две прямые, заданные уравнениями $y = kx + a$ и $y = kx + b$. Предположим, что эти прямые не совпадают, то есть $a \neq b$. Чтобы проверить, есть ли у этих двух прямых общая точка, составим уравнение:

$$kx + a = kx + b, \text{ откуда } a = b.$$

Это уравнение не имеет решений, поскольку $a \neq b$. Значит, общих точек прямые не имеют.

Считая, что прямые не совпадают, мы получили, что у них нет общих точек, то есть они параллельны.

Чтобы доказать утверждение вида «$A$ **или** $B$», можно предположить, что истинно утверждение «**не** $A$» и доказать только истинность утверждения $B$ (или наоборот).

## Вопросы

1. Как сформулировать отрицание к утверждению «$A$ **и** $B$»?
2. Как сформулировать отрицание к утверждению «$A$ **или** $B$»?
3. Что можно сказать о высказываниях $A$ и $B$, если высказывание «**не** ($A$ **и** $B$)» ложно?
4. Что можно сказать о высказываниях $A$ и $B$, если высказывание «**не** ($A$ **и** $B$)» истинно?

## Задачи

**33** Марина строила отрицание к утверждению «Завтра будет снег **или** завтра будет дождь». У неё получилось «Завтра будет солнечно». Верно ли построено отрицание? Объясните свой ответ.

**34** Являются ли отрицаниями друг друга утверждения $A$ и $B$?

а) $A$: «Андрей пишет ручкой **или** Андрей пишет карандашом»,
$B$: «Андрей пишет фломастером».

б) $A$: «Задуманное число больше 10 **или** задуманное число меньше 10»,
$B$: «Задуманное число равно 10».

в) $A$: «Треугольник $ABC$ равнобедренный **и** тупоугольный»,
$B$: «Треугольник $ABC$ неравнобедренный **и** остроугольный».

**35** Монету бросили 2 раза. Для каких элементарных исходов истинно утверждение «**не** ($A$ **и** $B$)»?

а) $A$: «При первом броске выпал орёл»,
$B$: «При втором броске выпала решка».

б) $A$: «Оба раза монета упала одной и той же стороной»,
$B$: «При втором броске выпала решка».

Выпишите эти элементарные исходы.

*Указание.* Легче сначала выписать элементарные исходы, при которых истинно утверждение «$A$ **и** $B$».

**36** Монету бросили 3 раза. Для каких элементарных исходов истинно утверждение «**не** ($C$ **или** $D$)»?

а) $C$: «При первом броске выпала решка»,
$D$: «При втором броске выпал орёл».

б) $C$: «Первые два раза монета упала одной и той же стороной»,
$D$: «При третьем броске выпал орёл».

Выпишите эти элементарные исходы.

*Указание.* Легче сначала выписать элементарные исходы, при которых истинно утверждение «$C$ **или** $D$».

**37** Постройте отрицание к утверждению:

а) «При бросании игрального кубика выпало менее пяти, **но** более трёх очков»;

б) «При бросании игрального кубика выпало менее пяти **или** более трёх очков»;

в) «В данном треугольнике два угла равны **и** в нём нет двух равных сторон»;

г) «В данном треугольнике два угла равны **или** в нём нет двух равных сторон»;

д) «Натуральное число при делении на 3 даёт остаток 1 **или** 2»;

е) «Натуральное число делится на 3 **и** сумма его цифр тоже делится на 3».

**38** Приведите пример, показывающий, что следующее высказывание не является истинным. Сформулируйте отрицание. Является ли отрицание истинным высказыванием?

а) «Любое натуральное число является простым **или** составным».

б) «Любой треугольник является тупоугольным **или** остроугольным».

**39** Даны два высказывания $A$ и $B$. Истинно или ложно высказывание «**не** ($A$ **или** $B$)»?

а) $A$: «А. С. Пушкин — поэт»,
$B$: «А. С. Пушкин писал рассказы в прозе».

б) $A$: «У кошки 4 лапы»,
$B$: «У паука 6 ног».

в) $A$: «Река Волга впадает в Чёрное море»,
$B$: «Река Амазонка впадает в Красное море».

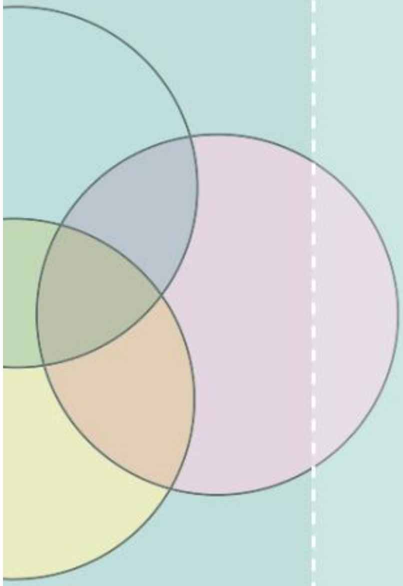
**40** Постройте высказывание **«не (*A* и *B*)»** и определите, истинно оно или ложно.

а) *A*: «Солнце — это звезда»,
*B*: «Солнце — это планета».

б) *A*: «Лиссабон — столица Португалии»,
*B*: «Канберра — столица Австралии».

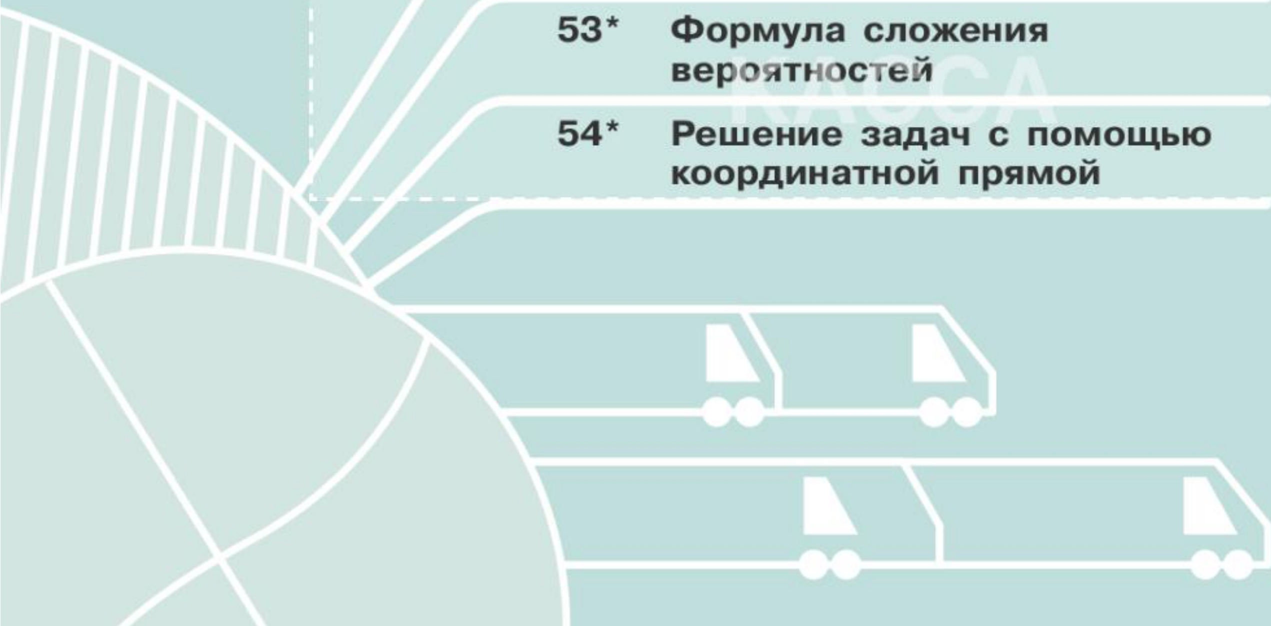
в) *A*: «Картину «Боярыня Морозова» написал В. М. Васнецов»,
*B*: «Картину «Запорожцы пишут письмо турецкому султану» написал П. Пикассо».

# XII Операции над случайными событиями



С событиями, так же как с множествами, можно производить действия. В этой главе рассказывается о трёх основных действиях с событиями и о том, как правильно складывать вероятности двух событий, чтобы найти вероятность их объединения. Способ сложения вероятностей зависит от того, являются эти события несовместными или нет.





# 51 Определение случайного события. Взаимно противоположные случайные события

В главе VI мы обсуждали случайные опыты и приводили множество примеров случайных событий. Напомним, что случайный опыт оканчивается каким-либо одним элементарным событием. Какое именно элементарное событие наступит в данном опыте — дело случая. Два разных элементарных события вместе произойти не могут.

Элементарные события образуют множества, которые мы называем случайными событиями. Само по себе элементарное событие можно рассматривать как множество из одного элемента.

Напомним также, что пустое событие $\varnothing$ — это случайное событие, которое не содержит ни одного элементарного события. Пустое событие называют **невозможным**. Напротив, **достоверное** событие — это множество всех элементарных событий в опыте. Можно считать, что достоверное событие — это сам случайный опыт.

Случайные события можно разными способами сочетать друг с другом. При этом образуются новые случайные события. Мы обсудим три наиболее употребительных действия с событиями.

## Противоположные случайные события

Рассмотрим какой-нибудь случайный опыт и все элементарные события, которые возникают в этом опыте. Разобьём все элементарные события на два множества. Пусть первое множество образует случайное событие $A$. Тогда все остальные элементарные события благоприятствуют другому событию, которое мы будем обозначать $\overline{A}$ и говорить, что оно **противоположно** событию $A$.

Событие, **противоположное** событию $A$, — это множество всех элементарных событий, которые не принадлежат событию $A$.

Если событие $\overline{A}$ противоположно событию $A$, то событие $A$ противоположно событию $\overline{A}$. Поэтому события $A$ и $\overline{A}$ называют **взаимно противоположными**.

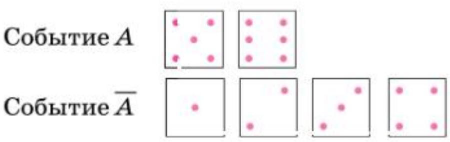


Рисунок 21

**ПРИМЕР 1.** Бросают игральную кость. Событию $A$ «выпадет больше четырёх очков» благоприятствуют элементарные события «пятёрка» и «шестёрка». Не благоприятствуют событию $A$ элементарные события «единица», «двойка», «тройка» и «четвёрка» (рис. 21). Вместе эти элементарные события благоприятствуют событию $\overline{A}$ «выпадет четыре очка или меньше».

Взаимно противоположные события одновременно произойти не могут, но какое-либо из них происходит обязательно. Поэтому

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Это равенство можно записать иначе:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \text{ и } P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

> Сумма вероятностей взаимно противоположных событий равна единице.

Это свойство часто оказывается полезным, если найти вероятность нужного события сложнее, чем вероятность противоположного.

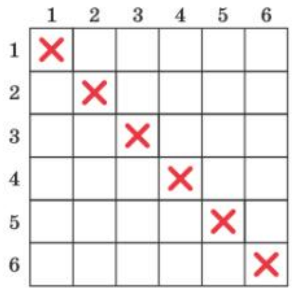



Рисунок 22

**ПРИМЕР 2.** Какова вероятность того, что при двукратном бросании игральной кости во второй раз выпадет не то же число очков, что в первый?

**Решение.** Назовём указанное событие $A$. Ему благоприятствует много элементарных событий. Проще найти вероятность противоположного события $\overline{A}$: «оба раза выпадет одно и то же число очков». Всего в опыте $N = 36$ равновозможных элементарных событий. Событию $\overline{A}$ благоприятствуют $N(\overline{A}) = 6$ из них (рис. 22).

Значит,

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{N(\overline{A})}{N} = \frac{1}{6}. \text{ Тогда } \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Соотношения между событиями удобно изображать с помощью **диаграмм Эйлера**. Весь случайный эксперимент, то есть все элементарные события опыта, изобразим прямоугольником. Если событие $A$ изображено кругом внутри прямоугольника, то оставшаяся часть прямоугольника изображает противоположное событие $\overline{A}$.

На рисунке 23 с помощью диаграмм Эйлера показаны взаимно противоположные события $A$ и $\overline{A}$.

> Достоверное и невозможное события взаимно противоположны.

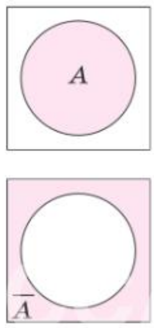
## Вопросы

**1** Что такое противоположные события?

**2** Обязательно ли события на диаграммах Эйлера изображаются кругами?

**3** Что означает прямоугольник, внутри которого изображаются события на диаграммах Эйлера?

**4** Сформулируйте словами свойство вероятностей противоположных событий.




Событие $A$

Событие $\overline{A}$, противоположное событию $A$

Рисунок 23

## Задачи

**41** В случайном эксперименте 20 элементарных событий. Событию $A$ благоприятствуют 12 из них. Сколько элементарных событий благоприятствуют событию $\overline{A}$?

**42** В некотором случайном опыте может произойти событие $K$. Найдите вероятность события $\overline{K}$, если вероятность события $K$ равна:

а) 0,4; б) 0,85; в) 0,13; г) $\frac{1}{2}$.

**43** Докажите, что события $A$ и $B$ не могут быть противоположными, если

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}7, \text{ а } \mathrm{P}(B) = 0{,}44.$$

**44** Вероятность события $A$ равна 0,3, а вероятность события $B$ равна 0,7. Обязательно ли события $A$ и $B$ взаимно противоположны?

**45** Предположим, что на некотором производстве из 100 изготовленных сумок в среднем 3 бракованные (плохой шов, дефект кожи и т. п.). Это означает, что вероятность события «изготовленная сумка бракованная» равна 0,03. Найдите вероятность того, что изготовленная сумка качественная.

**46** При изготовлении батареек в среднем на 1000 качественных батареек приходится 4 батарейки с дефектом. Найдите вероятность того:

а) что случайно выбранная батарейка имеет дефект;

б) что случайно выбранная батарейка не имеет дефектов.

**47** Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,19. Покупатель в магазине выбирает одну шариковую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

**48** В каждой четвёртой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Аня покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Аня не найдёт приз в своей банке.

**49** В среднем из каждых 80 поступивших в продажу аккумуляторов 76 аккумуляторов заряжены. Найдите вероятность того, что выбранный в магазине наудачу аккумулятор не заряжен.

**50** Могут ли быть противоположными события $C$ и $D$, если:

а) $\mathrm{P}(C) = 0{,}12$; $\mathrm{P}(D) = 0{,}78$;

б) $\mathrm{P}(C) = 0{,}14$; $\mathrm{P}(D) = 0{,}86$;

в) $\mathrm{P}(C) = \dfrac{a}{a+b}$, $\mathrm{P}(D) = \dfrac{b}{a+b}$, где $a > 0$, $b > 0$;

г) $\mathrm{P}(C) = 0{,}5 + n$; $\mathrm{P}(D) = 0{,}5 - n$, где $-0{,}5 < n < 0{,}5$?

**51** Бросают одну игральную кость. Перечислите элементарные события, благоприятствующие событию $\overline{A}$, опишите событие $\overline{A}$ словами и найдите $\mathrm{P}(\overline{A})$, если событие $A$ состоит в том, что:

а) выпадет шестёрка;

б) выпадет чётное число очков;

в) выпадет число очков, кратное трём;

г) выпадет от 2 до 5 очков.

**52** Игральную кость бросают дважды. Опишите словами событие, противоположное событию $A$, и найдите его вероятность, если событие $A$ состоит в том, что в сумме при двух бросках выпадет: а) 2 очка; б) 12 очков; в) менее 4 очков; г) более 10 очков.

**53** В классе 15 мальчиков и 10 девочек. Из класса случайным образом выбирают одного ученика. Событие $D$ — «выбрана девочка».

а) Сколько элементарных событий благоприятствует событию $D$?

б) Чему равна вероятность события $D$?

в) Опишите словами событие $\overline{D}$.

г) Чему равна вероятность $\mathrm{P}(\overline{D})$?

**54** На диаграмме Эйлера (рис. 24) изображены события $A$ и $B$. Нарисуйте диаграмму в тетради и выделите на ней событие, которое состоит в том, что:

а) наступило событие $\overline{A}$;

б) наступило событие $\overline{B}$;

в) событие $A$ наступило, а событие $B$ нет;

г) событие $B$ наступило, а событие $A$ нет.

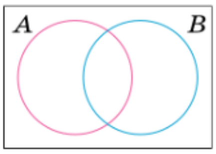



Рисунок 24

**55** Симметричную монету бросили 4 раза. Орёл при этом может выпасть 1, 2, 3 или 4 раза, а может не выпасть ни разу. Вероятности этих событий даны в таблице 1.

Найдите вероятность события, противоположного событию:

а) «орёл не выпадет ни разу»;

б) «орёл выпадет более одного раза»;

в) «решка выпадет менее трёх раз»;

г) «орёл выпадет неизвестно сколько раз, но точно не два раза».

Таблица 1. **Вероятности выпадения 0, 1, 2, 3 и 4 орлов**

| Число орлов | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |

**56** Из класса выбирают двух учеников. Опишите словами событие $\overline{B}$, если событие $B$ состоит в том, что:

а) оба выбранных ученика — мальчики;

б) выбраны ученики одного пола.

**57** В люстре пять новых лампочек. Опишите словами событие, противоположное событию:

а) «в течение года перегорит хотя бы одна из лампочек»;

б) «в течение года перегорят ровно две лампочки»;

в) «в течение года перегорит больше трёх лампочек»;

г) «в течение года перегорит меньше четырёх лампочек».

## 52 Объединение и пересечение событий

Случайные события — это множества. С ними можно производить действия, как и со всякими другими множествами.

**Объединение** двух случайных событий $A \cup B$ — это множество элементарных событий, которые благоприятствуют хотя бы одному из событий $A$ и $B$.

**Пересечение** двух случайных событий $A \cap B$ — это множество элементарных событий, которые благоприятствуют и событию $A$, и событию $B$.

**ПРИМЕР 1.** Продавщица выбирает два костюма, для того чтобы поместить их в витрину магазина. В ассортименте есть чёрные (Ч) и синие (С) костюмы. Элементарные события этого случайного опыта представляют собой пары костюмов, которые мы обозначим:

ЧС, ЧЧ, СС и СЧ.

Пусть, например, событие $A$ состоит в том, что первый костюм чёрного цвета. Этому событию благоприятствуют элементарные события

ЧС и ЧЧ.

Событие $B$ наступает, если второй костюм чёрного цвета; ему благоприятствуют элементарные события

СЧ и ЧЧ.

Объединению событий $A \cup B$ «хотя бы один из костюмов чёрного цвета» в этом случае благоприятствуют три элементарных события:

ЧС, ЧЧ и СЧ.

Пересечение $A \cap B$ состоит в том, что оба костюма чёрные. Этому событию благоприятствует единственное элементарное событие: ЧЧ.

Объединение и пересечений событий можно изобразить на диаграмме Эйлера (рис. 25). Пусть левый круг изображает событие $A$, правый круг — событие $B$. Тогда фигура, состоящая из обоих кругов, — это событие $A \cup B$, а пересечение $A \cap B$ изображается общей частью кругов.

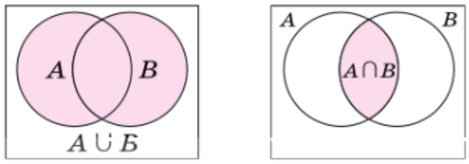
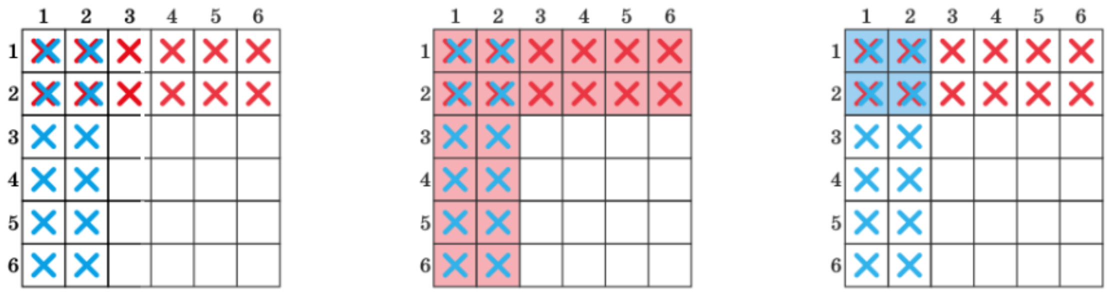



Рисунок 25

**ПРИМЕР 2.** Игральную кость бросают дважды. Пусть событие $A$ — «в первый раз выпало меньше трёх очков», а событие $B$ — «во второй раз выпало меньше трёх очков». Сформулируем словами и изобразим в таблице эксперимента события $A \cap B$ и $A \cup B$.

Событие $A \cap B$ состоит в том, что оба раза выпало меньше трёх очков. Событие $A \cup B$ состоит в том, что **хотя бы** раз выпало меньше, чем три очка.

На рисунке 26 события $A$, $B$, их пересечение и объединение показаны в таблице случайного эксперимента, в котором 2 раза бросают игральную кость.



а) Красными крестиками показано событие $A$, синими — событие $B$.

б) Закрашено событие $A \cup B$

в) Закрашено событие $A \cap B$

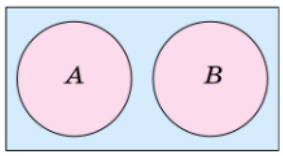
Рисунок 26

## Несовместные события

Если события $A$ и $B$ не имеют общих благоприятствующих элементарных событий, то они не могут наступить одновременно в одном и том же опыте. Такие события называют **несовместными**, а их пересечение — невозможным, или **пустым**, событием. Можно написать $A \cap B = \varnothing$.

События $A$ и $B$ называются **несовместными**, если их пересечение не содержит элементарных событий.

Вероятность пересечения несовместных событий равна 0: $P(\varnothing) = 0$. На диаграмме Эйлера несовместные события изображаются в виде двух непересекающихся фигур (рис. 27).




Несовместные события

Рисунок 27

**ПРИМЕР 3.** В одном и том же году события «8 марта приходится на пятницу» и «8 марта приходится на субботу» являются несовместными.

## Вопросы

**1** Что такое пересечение двух событий?

**2** Что такое объединение двух событий?

**3** Сформулируйте определение несовместных событий.

**4** Спортсмен выступает на соревнованиях по прыжкам. Первое событие — «спортсмен травмировал левую ногу». Второе событие — «спортсмен травмировал правую ногу». Опишите словами объединение и пересечение этих событий.

## Задачи

**58** На диаграмме Эйлера (рис. 28) показано число элементарных событий, благоприятствующих каждому из двух событий $A$ и $B$. Перенесите рисунок в тетрадь и закрасьте объединение событий $A$ и $B$. Сколько элементарных событий благоприятствует событию $A \cup B$?

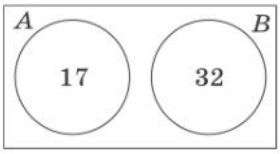



Рисунок 28

**59** Событию $U$ в ходе некоторого опыта благоприятствуют 5 элементарных событий. Событию $V$ благоприятствуют 8 элементарных событий, но ни одно из них не благоприятствует событию $U$. Сколько элементарных событий благоприятствует событию $U \cup V$?

**60** Событию $A$ благоприятствуют 6 элементарных событий, а событию $B$ — 8 элементарных событий. Из этих 8 элементарных событий 4 благоприятствуют сразу двум событиям. Нарисуйте в тетради соответствующую диаграмму Эйлера и ответьте на вопросы.

а) Сколько элементарных событий благоприятствуют событию $A$, но не благоприятствуют событию $B$?

б) Сколько элементарных событий благоприятствуют событию $B$, но не благоприятствуют событию $A$?

в) Сколько элементарных событий благоприятствуют событию $A \cup B$?

**61** В ходе некоторого опыта событию $A$ благоприятствуют 6 элементарных событий, событию $B$ — 8 элементарных событий. При этом 2 элементарных события благоприятствуют событию $A \cap B$. Сколько элементарных событий благоприятствуют событию:

а) «событие $A$ наступает, а событие $B$ нет»;

б) «событие $B$ наступает, а событие $A$ нет»?

**62** В ходе некоторого случайного опыта событию $A$ благоприятствуют 7 элементарных событий, событию $B$ — 10 элементарных событий. 12 элементарных событий благоприятствуют событию $A \cup B$. Сколько элементарных событий благоприятствуют событию:

а) «событие $A$ наступит, а событие $B$ нет»;

б) «событие $B$ наступит, а событие $A$ нет»?

**63** Монету бросают дважды. Событие $A$ — «первый раз выпадет орёл». Событие $B$ — «второй раз выпадет орёл». Выпишите элементарные события, благоприятствующие каждому из этих событий и событию $A \cup B$.

**64** Монету бросают дважды. Представьте в виде объединения двух событий событие:

а) «хотя бы один раз выпадет решка»;

б) «оба раза выпадет одна и та же сторона монеты».

**65** На диаграмме Эйлера (рис. 29) изображены события $A$ и $B$. Нарисуйте диаграмму в тетради и укажите на ней событие $C$, которое состоит в том, что:

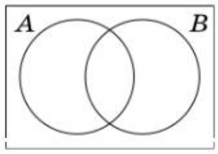


Рисунок 29

а) событие $A$ наступило, а событие $B$ нет;

б) не наступило ни одно из событий $A$ и $B$;

в) наступило хотя бы одно из событий $A$ и $B$;

г) наступили оба события.

Какое из этих событий является событием $A \cap B$? Какое из этих событий является событием $\overline{A \cup B}$?

**66** Из класса случайным образом последовательно выбирают двух учеников. Событие $D$ — «первый выбранный ученик — девочка». Событие $C$ — «второй выбранный ученик — девочка». Опишите словами события $D \cap C$ и $D \cup C$.

**67** Из класса случайным образом последовательно выбирают двух учеников. Событие $A$ — «первый выбранный ученик — девочка». Опишите словами объединение и пересечение событий $A$ и $B$, если событие $B$:

а) «среди выбранных учеников есть только одна девочка»;

б) «второй выбранный ученик — мальчик».

**68** Бросают одну игральную кость. Событие $A$ — «выпадет чётное число очков». Событие $B$ состоит в том, что:

а) выпадет число очков, кратное 3;

б) выпадет нечётное число очков;

в) выпадет число очков, кратное 4;

г) выпадет число очков, кратное 5.

Выпишите все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cup B$. Найдите $\mathrm{P}(A \cup B)$.

**69** Игральную кость бросают дважды. Событие $A$ — «при первом броске выпадет единица». Событие $B$ — «при втором броске выпадет единица».

а) Укажите в таблице этого случайного опыта все элементарные события, благоприятствующие событию $A \cup B$.

б) Сколько у событий $A$ и $B$ общих благоприятствующих элементарных событий?

в) Опишите словами событие $A \cup B$.

г) Найдите вероятность события $A \cup B$.

**70** Игральную кость бросают дважды. Событие $U$ — «в первый раз выпадет число очков, кратное трём». Событие $V$ — «во второй раз выпадет число очков, кратное трём».

а) В таблице элементарных событий этого опыта выделите элементарные события, благоприятствующие одновременно событию $U$ и событию $V$.

б) Опишите словами событие $U \cup V$.

в) Найдите вероятность события $U \cup V$.

**71** Игральную кость бросают 2 раза. Событие $K$ — «в первый раз выпадет чётное число очков». Событие $L$ — «при втором броске выпадет чётное число очков».

а) Выделите в таблице элементарные события, которые благоприятствуют хотя бы одному из событий $K$ и $L$. Сколько их?

б) Опишите словами событие $K \cup L$.

в) Найдите вероятность события $K \cup L$.

**72** Докажите, что для любых событий $A$ и $B$ верны неравенства

$$\mathrm{P}(A \cup B) \geqslant \mathrm{P}(A) \text{ и } \mathrm{P}(A \cup B) \geqslant \mathrm{P}(B).$$

**73** На диаграмме Эйлера (рис. 30) показаны события $A$, $B$ и $C$. Нарисуйте диаграммы, изображающие событие:

а) $A \cup \overline{B}$; г) $\overline{A} \cup B \cup C$;
б) $\overline{A \cup B}$; д) $A \cup \overline{B \cup C}$;
в) $A \cup B \cup C$; е) $\overline{A \cup B \cup C}$.

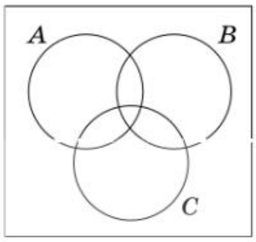



Рисунок 30

**74** Бросают одну игральную кость. Событие $A$ — «выпадет чётное число очков». Событие $B$ заключается в том, что:

а) выпадет число очков, кратное 3;
б) выпадет число очков, кратное 4;
в) выпадет число очков, большее 4;
г) выпадет число очков, меньшее 3.

Для каждого случая укажите элементарные события, благоприятствующие событию $A \cap B$.

**75** Игральную кость бросают дважды. Событие $A$ — «в первый раз выпадет меньше 3 очков». Событие $B$ — «во второй раз выпадет больше 4 очков».

а) В таблице этого опыта укажите элементарные события, благоприятствующие событию $A \cap B$.

б) Найдите $P(A \cap B)$.

**76** Запишите формулой событие, изображённое на диаграмме Эйлера (рис. 31).

**77** Изобразите на диаграмме Эйлера событие:

а) $A \cap \overline{B}$; в) $\overline{A} \cap B$;
б) $\overline{A} \cap \overline{B}$; г) $\overline{A \cap B}$.

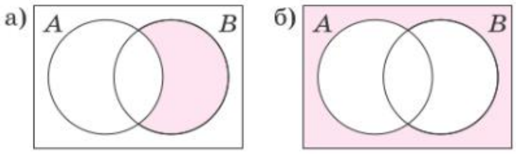



Рисунок 31

**78** Докажите, что $P(A \cap B) \leqslant P(A)$ и $P(A \cap B) \leqslant P(B)$.

**79** Запишите формулой событие, изображённое на диаграмме Эйлера (рис. 32).

**80** Изобразите на диаграмме Эйлера событие:

а) $A \cap B \cap C$; г) $A \cap \overline{B \cap C}$;
б) $A \cap \overline{B} \cap C$; д) $\overline{A \cap B \cap C}$.
в) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$;

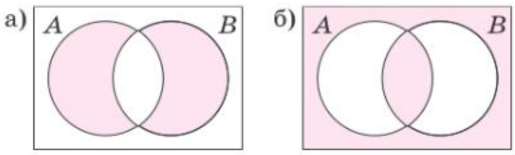



Рисунок 32

**81** С помощью диаграмм Эйлера докажите равенство:

а) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$; б) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

*Указание.* Для доказательства нужно изобразить оба события на диаграмме Эйлера. Если изображения совпадают, то совпадают и события.

# 53* Формула сложения вероятностей

## Случай, когда события несовместны

Если события $A$ и $B$ не имеют общих благоприятствующих элементарных событий, то они несовместны, их пересечение является невозможным событием. Поэтому вероятность пересечения несовместных событий равна нулю: $P(A \cap B) = 0$.

**ПРИМЕР 1.** Игральную кость бросают дважды. Рассмотрим событие $A$ «в первый раз выпало больше очков, чем во второй» и событие $B$ «в первый раз выпало меньше очков, чем во второй». Нарисуем таблицу этого случайного опыта. Выделим в ней разными цветами элементарные события, благоприятствующие событию $A$ и событию $B$ (рис. 33).

Общих элементарных событий у событий $A$ и $B$ нет, и это видно на рисунке. События $A$ и $B$ несовместны.

Поставим вопрос: чему равна вероятность объединения $A \cup B$? Элементарные события равновозможны. Нужно пересчитать все элементарные события, которые благоприятствуют событию $A$, и все, которые благоприятствуют событию $B$, сложить полученные числа и разделить сумму на общее число элементарных событий — 36:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{15 + 15}{36} = \frac{5}{6}.$$

Можно разбить дробь на два слагаемых:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B),$$

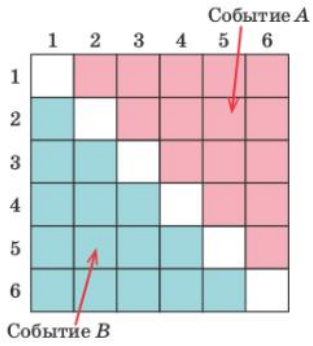


Рисунок 33

то есть вероятность объединения двух событий оказалась равна сумме вероятностей этих событий. Это свойство верно для любых двух несовместных событий в любом случайном опыте.

**Правило сложения вероятностей несовместных событий.** Вероятность объединения несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

## Общий случай

Если события $A$ и $B$ не являются несовместными, т. е. они **совместны** и могут одновременно наступить в результате одного опыта, то к ним нельзя применить правило для несовместных событий. Убедимся в этом на примере.

**ПРИМЕР 2.** Правильную игральную кость бросают 2 раза. Событие $A$ — «в первый раз выпало меньше 3 очков». Событие $B$ — «во второй раз выпало меньше 3 очков».

Событию $A$ благоприятствует 12 элементарных событий. Событию $B$ благоприятствует тоже 12 элементарных событий. Но четыре элементарных события общие, поскольку события $A$ и $B$ совместны. Событию $A \cup B$ благоприятствуют 20 элементарных событий (рис. 34).

Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \text{ а } \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Очевидно, $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{9}$, значит, $\mathrm{P}(A \cup B) \neq \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$,

поскольку $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$; $\frac{6}{9} > \frac{5}{9}$.

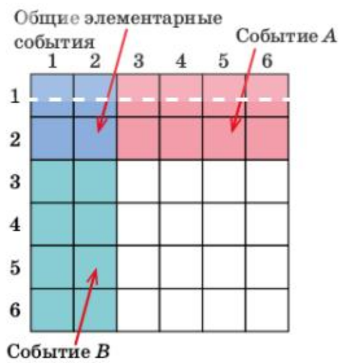


Рисунок 34

Получается, что формула $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ в этом случае неверна.

Как быть? Изобразим совместные события $A$ и $B$ на диаграмме Эйлера (рис. 35).

Рассмотрим два события: событие $C$ «наступило $A$, но не наступило $B$» и событие $D$ «наступило $B$, но не наступило $A$». На диаграмме Эйлера (см. рис. 35) видно, что события $C$ и $A \cap B$ несовместны, поскольку соответствующие фигуры не имеют общих точек. Вместе эти события образуют событие $A$. Поэтому по правилу сложения вероятностей для несовместных событий находим: $P(A) = P(C) + P(A \cap B)$.

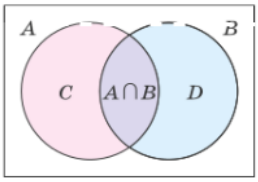


Рисунок 35

Точно так же получаем $P(B) = P(D) + P(A \cap B)$.

Сложив эти равенства почленно, получим

$$P(A) + P(B) = P(C) + P(A \cap B) + P(D) + P(A \cap B).$$

События $C$, $A \cap B$ и $D$ несовместны и вместе образуют событие $A \cup B$. Получаем

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B),$$

откуда

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Мы вывели общую формулу, и теперь можно сформулировать общее правило.

**Правило сложения вероятностей.** Вероятность объединения двух событий равна сумме их вероятностей без вероятности их пересечения:

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).}$$

Полученная формула справедлива для любых двух событий, в том числе для несовместных, поскольку в случае несовместных событий $P(A \cap B) = 0$.

## Вопросы

**1** Что такое несовместные события в случайном опыте? Приведите пример несовместных событий в опыте, в котором монету бросают 2 раза.

**2** Сформулируйте словами правило сложения вероятностей для несовместных событий. Запишите формулу сложения вероятностей для несовместных событий.

**3** Как несовместные события изображаются на диаграммах Эйлера?

**4** Запишите формулу сложения вероятностей для двух произвольных событий.

## Задачи

**82** Бросают одну игральную кость. Событие $A$ — «выпало чётное число очков». Событие $B$ — «выпало число очков, кратное пяти».

а) Являются ли события $A$ и $B$ несовместными?

б) Используя правило сложения вероятностей, найдите $P(A \cap B)$.

**83** События $U$ и $V$ несовместны. Найдите вероятность их объединения, если:

а) $P(U) = 0,2$, $P(V) = 0,4$;  б) $P(U) = 0,5$, $P(V) = 0,2$.

**84** Могут ли события $A$ и $B$ быть несовместными, если:

а) $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$;  в) $P(A) = a$, $P(B) = 1,2 - a$;

б) $P(A) = 0,1$, $P(B) = 0,7$;  г) $P(A) = P(B) = 0,6$?

**85** Вычислите $P(A \cup B)$, если:

а) $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cap B) = 0,4$;

б) $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cap B) = 0,3$.

**86** Вычислите вероятность пересечения событий $A$ и $B$, если:

а) $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cup B) = 0,9$;

б) $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cup B) = 0,8$.

**87** В торговом центре недалеко друг от друга расположены два автомата, продающие кофе. Вероятность того, что к вечеру в первом автомате закончится кофе, равна 0,3. Такая же вероятность того, что кофе закончится во втором автомате. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность события:

а) «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов»;

б) «кофе закончится только в одном из автоматов».

**88** В банке рядом друг с другом стоят два банкомата — старый и новый. Вероятность того, что в течение дня в старом банкомате закончатся денежные купюры, равна 0,2. Вероятность того, что купюры закончатся в новом банкомате, равна 0,1. В двух банкоматах купюры могут закончиться с вероятностью 0,05. Найдите вероятность события:

а) «в течение дня купюры закончатся хотя бы в одном из банкоматов»;

б) «в течение дня купюры не закончатся ни в одном из банкоматов»;

в) «в течение дня купюры закончатся только в старом банкомате»;

г) «к закрытию банка купюры останутся хотя бы в одном из банкоматов».

**89** Могут ли события $C$ и $D$ быть такими, что $P(C) = 0,6$; $P(D) = 0,7$ и $P(C \cap D) = 0,1$?

**90** Пользуясь диаграммой Эйлера, докажите, что несовместны события:

а) $\overline{A}$ и $A \cap B$; б) $A \cap B$ и $A \cap \overline{B}$.

**91** Пользуясь диаграммой Эйлера для событий $A$, $B$ и $C$, выведите формулу сложения вероятностей для трёх событий:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

# 54* Решение задач с помощью координатной прямой

Часто на практике случайные эксперименты и события в них связаны с изменчивыми или **случайными величинами**. События состоят в том, что та или иная величина принимает определённое значение или попадает в какой-то промежуток значений. При этом вся числовая прямая содержит все возможные элементарные события эксперимента, поэтому является достоверным событием.

**ПРИМЕР 1.** Барометр измеряет атмосферное давление $p$. Рассмотрим события:

$A$ = {атмосферное давление от 750 до 760 мм рт. ст.},
$B$ = {атмосферное давление больше 740 мм рт. ст.},
$C$ = {атмосферное давление от 755 до 770 мм рт. ст.}.

Изобразим события на числовой прямой промежутками (рис. 36). Это немного похоже на изображение событий на диаграмме Эйлера.

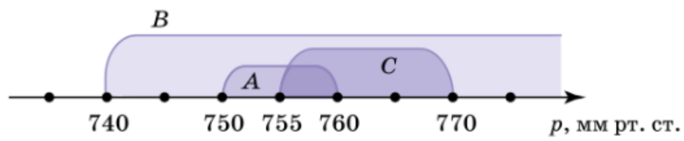



Рисунок 36

Данных в условии недостаточно, чтобы найти вероятности этих событий. Но всё же некоторые выводы можно сделать. Событие $A$ целиком содержится в событии $B$. Это означает, что вероятность события $A$ не может быть больше вероятности события $B$. Значит, $P(A) \leqslant P(B)$. В этом опыте можно даже утверждать, что $P(A) < P(B)$ (подумайте почему). Точно так же $P(C) < P(B)$.

Сравнить вероятности событий $A$ и $C$ нельзя, даже несмотря на то, что событие $C$ изображается более длинным отрезком, чем событие $A$. Не исключено, что событие $A$ случается чаще, чем событие $C$.

**ПРИМЕР 2.** При продаже автомобильного аккумулятора продавец в присутствии покупателя измеряет напряжение на клеммах аккумулятора. Замечено, что при проверке у 87% новых аккумуляторов напряжение на клеммах больше 11 В, а у 95% — не больше 13 В. Рассмотрим возможные события в этом эксперименте и изобразим их на числовой прямой (рис. 37).

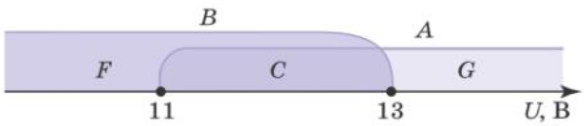



Рисунок 37

Обозначим напряжение $U$. Событие $A$ «напряжение больше 11 В» теперь можно обозначить $A = \{U > 11\text{ В}\}$. Так же обозначим и другие события: $B = \{U \leqslant 13\text{ В}\}$, $C = \{11\text{ В} < U \leqslant 13\text{ В}\}$, $F = \{U \leqslant 11\text{ В}\}$ и $G = \{U > 13\text{ В}\}$.

Из условия следует, что $P(A) = 0{,}87$ и $P(B) = 0{,}95$. Найдём вероятности остальных событий. В этом поможет рисунок. Событие $F$ является противоположным событию $A$: лучи, изображающие эти события на рисунке 37, являются продолжениями друг друга. Значит, $P(F) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}87 = 0{,}13$.

Аналогично найдём вероятность события $G$: $P(G) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

Найденные вероятности удобно указывать на числовой прямой (рис. 38).

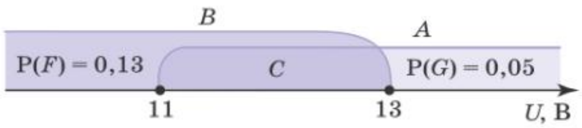



Рисунок 38

Теперь вероятность события $C$ легко найти. События $F$, $C$ и $G$ несовместны, а вместе они занимают всю числовую прямую, то есть содержат все элементарные события эксперимента. Поэтому $P(F) + P(C) + P(G) = 1$.

Тогда $P(C) = 1 - P(F) - P(G) = 1 - 0{,}13 - 0{,}05 = 0{,}82$.

Вероятность события $C$ можно найти и другим способом. Оно является пересечением событий $A$ и $B$. Из формулы сложения вероятностей получаем

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(C).$$

Объединение $A \cup B$ — это достоверное событие, занимающее всю числовую прямую, поэтому $P(A \cup B) = 1$. Подставим известные значения в формулу:

$$1 = 0{,}87 + 0{,}95 - P(C),$$

откуда

$$P(C) = 0{,}87 + 0{,}95 - 1 = 0{,}82.$$

## Вопросы

**1** Чему равна вероятность события, изображение которого на числовой прямой занимает всю прямую?

**2** Как изображаются на координатной прямой взаимно противоположные события?

**3** Промежуток, изображающий первое событие, целиком содержится в промежутке, изображающем второе событие. Сравните вероятности этих событий.

## Задачи

**92** Аня ждёт автобус на остановке. Изобразите на координатной прямой следующие события:

$A$ = {автобус придёт не меньше чем через 1 мин},

$B$ = {автобус придёт не меньше чем через 2 мин},

$C$ = {автобус придёт не меньше чем через 5 мин}.

Расположите события в порядке возрастания их вероятностей.

**93** Мама измеряет температуру воды для купания ребёнка. Изобразите на координатной прямой следующие события:

$A$ = {температура воды не ниже 35,5 °C},

$B$ = {температура воды не ниже 36,2 °C},

$C$ = {температура воды не ниже 36 °C}.

Расположите эти события в порядке возрастания их вероятностей.

**94** На хлебозаводе производится контрольное взвешивание испечённой буханки хлеба. Изобразите на координатной прямой следующие события:

$A$ = {масса буханки больше 790 г},

$B$ = {масса буханки меньше 810 г},

$C$ = {масса буханки от 792 до 808 г},

$D$ = {масса буханки от 790 до 810 г}.

Укажите событие, которое имеет наименьшую вероятность.

**95** Вероятность того, что в случайный момент времени атмосферное давление в некотором городе не выше 745 мм рт. ст., равна 0,53. Найдите вероятность того, что в случайный момент давление превышает 745 мм рт. ст. Изобразите соответствующие события на числовой прямой.

**96** При изготовлении подшипников диаметром 65 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного более чем на 0,01 мм, равна 0,034. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр в пределах от 64,99 до 65,01 мм.

**97** При изготовлении шоколадных батончиков номинальной массой 55 г вероятность того, что масса батончика будет в пределах от 54 до 56 г, равна 0,76. Найдите вероятность того, что масса батончика отличается от номинальной больше чем на 1 г.

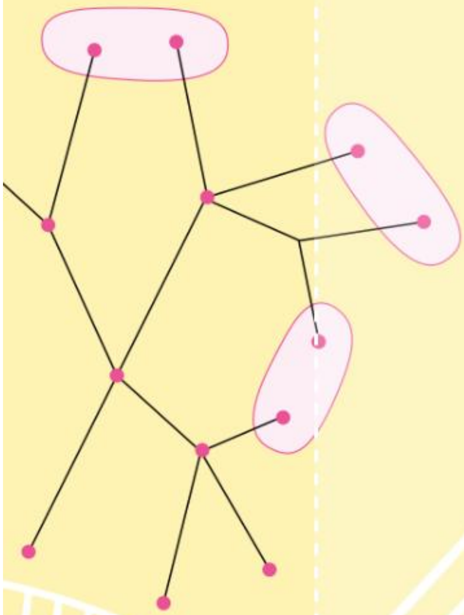
**98** Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,96. Вероятность того, что он прослужит два года или больше, равна 0,87. Найдите вероятность того, что сканер прослужит меньше двух лет, но больше года.

**99** Термометр измеряет комнатную температуру. Вероятность того, что температура окажется не ниже 18 °C, равна 0,78. Вероятность того, что температура окажется не выше 23 °C, равна 0,63. Найдите вероятность того, что температура окажется в пределах от 18 до 23 °C.

**100** В роддоме измеряют массу новорождённого. Вероятность того, что масса окажется не меньше 3 кг, равна 0,87; вероятность того, что масса окажется не больше 3 кг 600 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что масса случайно выбранного новорождённого окажется в пределах от 3 кг до 3 кг 600 г.

# XIII Условная вероятность и независимые события

Когда проводится случайный опыт, наступившие события могут менять вероятности других событий. Получаются условные вероятности, то есть вероятности при определённом условии. Рассматривать связи между событиями в одном эксперименте можно не только с помощью диаграмм Эйлера. Часто это удобно делать с помощью дерева случайного опыта.



# 55 Условная вероятность и правило умножения вероятностей

Рассказ об условной вероятности начнём с примера, в котором нет ни слова о вероятностях.

**ПРИМЕР 1.** В некотором городе 48% населения — мужчины (для простоты к мужчинам отнесём всех жителей мужского пола, включая детей). Среди мужчин 55% работают. Какую часть жителей города составляют работающие мужчины?

Такие задачи решаются с помощью правила умножения: *чтобы найти часть от числа, выраженную дробью, нужно число умножить на эту дробь*. Предположим, что в городе всего $n$ жителей. Тогда жителей мужского пола в городе $n \cdot 0{,}48$ человек. Теперь, пользуясь этим же правилом, найдём число работающих мужчин: нужно полученную величину умножить на дробь 0,55:

$$n \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}55.$$

Значит, доля работающих мужчин равна

$$\frac{0{,}48 \cdot 0{,}55 \cdot n}{n} = 0{,}48 \cdot 0{,}55 = 0{,}264.$$

Общая численность жителей $n$, по сути, в решении не участвует. Результат получается умножением чисел 0,48 и 0,55.

Эту же задачу можно сформулировать, указывая не доли, а вероятности. Рассмотрим случайный опыт, в котором из всех жителей случайным образом выбирается один.

Введём обозначения для событий. Пусть

$$B = \{\text{выбранный житель окажется мужчиной}\},$$
$$A = \{\text{выбранный житель работает}\}.$$

Вероятность события $B$ равна доле мужчин, то есть 0,48. Вероятность события $A$ неизвестна. Но зато известна вероятность этого события при условии, что выбран мужчина, — это доля работающих мужчин, то есть 0,55. Это *условная вероятность события $A$ при условии $B$*. Обозначают её $\mathrm{P}(A|B)$. В нашем случае $\mathrm{P}(A|B) = 0{,}55$.

Вопрос теперь звучит иначе. Вместо того, чтобы спросить, какую часть составляют работающие мужчины, спросим, какова вероятность события «выбранный житель — работающий мужчина».

Иными словами, нужно найти вероятность события $A \cap B$, которое состоит в том, что выбранный житель окажется мужчиной и при этом работает.

Применим то же правило, но теперь множители не доли, а вероятности:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B) = 0{,}48 \cdot 0{,}55 = 0{,}264.$$

Дадим определение условной вероятности.

Вероятность события $A$ при условии, что событие $B$ произошло, называется **условной вероятностью** события $A$ при условии $B$. Обозначается эта вероятность $\mathrm{P}(A|B)$.

Из правила нахождения части от величины мы получили правило умножения вероятностей.

**Правило умножения вероятностей.** Вероятность пересечения событий $A$ и $B$ равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности другого:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Это правило можно проиллюстрировать с помощью цепи $SBA$ (рис. 39). Около рёбер написаны вероятности. Сначала из начальной точки $S$ мы с вероятностью $P(B)$ «переходим» к событию $B$, а затем — к событию $A$, но уже с условной вероятностью $P(A|B)$. В результате осуществляются оба события, а значит, их пересечение $A \cap B$.

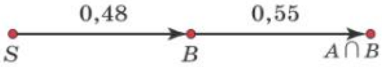


Рисунок 39

Такое изображение наглядно: нужно просто умножать вероятности вдоль цепи в графе случайного опыта.

Правило умножения мы получили на примере, но оно верно для любых случайных событий в любых случайных опытах и очень полезно при решении задач.

**ПРИМЕР 2.** В коробке 3 синих и 7 красных карандашей. По очереди извлекают 2 карандаша. Найдём вероятность того, что сначала появится красный, а затем — синий карандаш.

Можно построить довольно обширное множество элементарных событий (пар карандашей) и разбираться, сколько из них благоприятствуют появлению сначала красного, а потом синего карандаша. Это неудобно. Решим задачу иначе.

**Решение.** Пусть событие $A$ состоит в том, что первый карандаш оказался красным, тогда $P(A) = \frac{7}{10}$. После того как это случилось, в коробке остаётся 3 синих и 6 красных карандашей. Значит, вероятность события $B$ «второй карандаш синий» при условии $A$ равна $P(B|A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Требуется найти вероятность того, что оба события произошли, т. е. вероятность события $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{30}.$$

**ПРИМЕР 3.** В торговом центре установлены два автомата, продающие кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в каждом отдельном автомате, равна 0,3. В обоих автоматах кофе заканчивается к вечеру с вероятностью 0,21. Вечером пришёл мастер, чтобы обслужить автоматы, и обнаружил, что во втором автомате кофе закончился. Какова теперь вероятность, что и в первом автомате уже нет кофе?

**Решение.** Обозначим события. Пусть $A$ = {кофе закончился в первом автомате}, $B$ = {кофе закончился во втором автомате}.

Нужно найти условную вероятность $P(A|B)$.

По условию $P(B) = 0{,}3$ и $P(A \cap B) = 0{,}21$. Запишем правило умножения вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

и выразим из него нужную вероятность:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}21}{0{,}3} = 0{,}7.$$

Мы помним, что вероятность события $A$ равняется 0,3. Но это было до того, как мы узнали, что во втором автомате кофе закончился. Теперь вероятность события $A$ выросла до 0,7. Это понятно: как только во втором автомате кофе закончился, посетители торгового центра стали пользоваться только первым, и кофе в нём стал расходоваться быстрее.

На этом примере мы получили формулу условной вероятности.

**Формула условной вероятности.** Если вероятность события $B$ больше нуля, то

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

## Вопросы

**1** Запишите обозначение для условной вероятности события $C$ при условии события $E$.

**2** Чему равна условная вероятность выпадения двух орлов при двукратном бросании монеты, если в первый раз выпала решка?

**3** Чему равна условная вероятность выпадения двух орлов при двукратном бросании монеты, если в первый раз выпал орёл?

**4** В некотором опыте произошло событие $B$. Может ли это увеличить вероятность другого события; уменьшить вероятность другого события? Приведите примеры, когда условная вероятность события больше и когда она меньше исходной вероятности этого события.

## Задачи

**101** При двукратном бросании монеты в первый раз выпала решка. Найдите условную вероятность события:

а) «оба раза выпадет решка»;

б) «выпадет хотя бы один орёл»;

в) «выпадут два орла».

**102** При двукратном бросании игральной кости сумма выпавших очков равна 8. Найдите условную вероятность события:

а) «в первый раз выпадет 3 очка»;

б) «при одном из бросков выпадет 3 очка»;

в) «в первый раз выпадет меньше 5 очков»;

г) «во второй раз выпадет меньше 2 очков».

**103** При двукратном бросании игральной кости сумма выпавших очков равна 9. Найдите условную вероятность события:

а) «в первый раз выпадет 5 очков»;

б) «при одном из бросков выпадет 4 очка»;

в) «в первый раз выпадет меньше очков, чем во второй»;

г) «во второй раз выпадет меньше чем 3 очка».

**104** Игральную кость бросают 2 раза. В первый раз выпало 3 очка. Найдите вероятность того, что после второго броска сумма очков окажется:

а) равна 9; б) больше чем 7; в) больше чем 10; г) меньше чем 5.

**105** В случайном опыте есть события $A$ и $B$. Найдите вероятность пересечения событий $A \cap B$, если известно, что:

а) $P(B) = 0{,}3$ и $P(A|B) = 0{,}5$;

б) $P(B) = \frac{1}{5}$ и $P(A|B) = \frac{5}{8}$;

в) $P(B) = 0{,}72$ и $P(A|B) = 0{,}25$;

г) $P(B) = 0{,}34$ и $P(A|B) = 0{,}2$.

**106** В некотором городе 7% населения — студенты. Из всех студентов 60% учатся в университете. Найдите вероятность того, что случайно выбранный житель этого города является студентом университета.

**107** В посёлке 40% взрослого населения занято в сельском хозяйстве, причём 5% взрослого населения посёлка работают в агропромышленном холдинге «Нива». Для опроса случайно выбран житель этого посёлка, и оказалось, что он занят в сельском хозяйстве. При этом условии найдите условную вероятность того, что он работает в холдинге «Нива».

**108** На кассе в магазине продаются леденцы. В какой-то момент в коробке осталось 10 красных, 9 синих и 6 зелёных леденцов. Таня, Ваня и Маня по очереди покупают по одному леденцу. Кассир не глядя достаёт леденцы из коробки. Найдите вероятность того, что:

а) Таня и Ваня получат зелёные, а Маня — красный леденец;

б) Таня и Маня получат синие леденцы, а Ваня — красный;

в) Таня получит зелёный леденец, Ваня — красный, а Маня — синий;

г) все трое получат красные леденцы.

**109** Найдите вероятность получить $n$ разных результатов, бросив игральную кость $n$ раз, если:

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$; д) $n = 7$.

**110** В ящике 20 левых и 20 правых перчаток. Сколько нужно достать перчаток, не глядя в ящик, чтобы среди вынутых перчаток нашлась хотя бы одна левая и хотя бы одна правая перчатка:

а) наверняка (с вероятностью 1);

б) с вероятностью не меньше чем 0,95?

# 56 Дерево случайного опыта

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим случайный опыт, в котором монету бросают дважды. Будем изображать возможные последующие события с помощью дерева.

Начальное состояние, когда ни один бросок ещё не сделан, изобразим вершиной $S$. От этой вершины проведём рёбра к вершинам О и Р, которые изображают события «орёл» и «решка» при первом броске (рис. 40). От каждой из этих вершин проведём ещё два ребра к таким же событиям, которые могут случиться при втором броске. Около рёбер напишем вероятности событий.

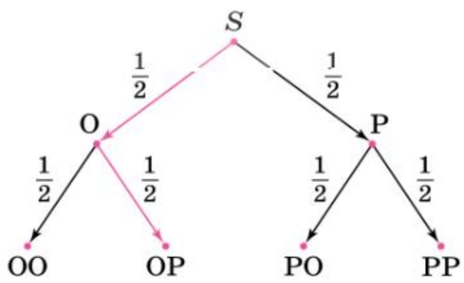



Рисунок 40. **Дерево случайного опыта, в котором монету бросают два раза**

> При построении дерева случайного опыта нужно следить, чтобы сумма вероятностей около всех рёбер, выходящих из одной вершины, была равна единице.

Обратите внимание: около ребра OO написана вероятность $\frac{1}{2}$. Это условная вероятность события «два орла» при условии, что в первый раз выпал орёл.

> Около рёбер в дереве случайного опыта подписываются условные вероятности.

> Если дерево случайного опыта конечное, то элементарные события в дереве случайного опыта изображаются цепями, ведущими из начальной вершины к конечным вершинам дерева.

Например, элементарное событие OP на рисунке 40 изображается цепью $S$OP. Она выделена на рисунке красной линией.

> Найти вероятность элементарного события можно с помощью правила умножения вероятностей: нужно найти произведение условных вероятностей вдоль соответствующей цепи.

Например, чтобы найти вероятность события OP, нужно умножить вероятности вдоль цепи $S$OP:

$$\mathrm{P(OP)} = \mathrm{P}(S\mathrm{OP}) = \mathrm{P}(S\mathrm{O}) \cdot \mathrm{P(OP)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Не элементарные, а более сложные события изображаются промежуточными вершинами дерева или какой-нибудь фигурой (например, овалом), объединяющей благоприятствующие элементарные события.

**ПРИМЕР 2.** На рисунке 41 изображено дерево некоторого случайного опыта, в котором 4 элементарных события: $a$, $b$, $c$ и $d$. Случайное событие $A$ показано овалом, объединяющим элементарные события $c$ и $d$: $A = \{c, d\}$.

Промежуточная вершина $K$ изображает другое событие, которому благоприятствуют элементарные события $a$, $b$ и $c$: $K = \{a, b, c\}$. Найдём вероятности событий $A$ и $K$.

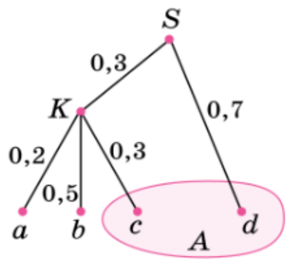


Рисунок 41

Событию $A$ благоприятствуют элементарные события $c$ и $d$. Значит, нужно найти сумму вероятностей цепей $SKc$ и $Sd$:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(SKc) + \mathrm{P}(Sd) = 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 = 0{,}79.$$

Событию $K$ благоприятствуют три элементарных события. Но нам даже не нужно искать вероятности всех трёх цепей. Три ветки, ведущие к вершинам $a$, $b$ и $c$, «растут» из ребра $SK$, которое имеет вероятность 0,3. Поэтому

$$\mathrm{P}(K) = \mathrm{P}(SK) = 0{,}3.$$

Можно сформулировать общее правило нахождения вероятностей событий с помощью дерева. Оно получается из правила сложения вероятностей несовместных событий.

**Правило.** Чтобы найти вероятность события с помощью дерева, нужно сложить вероятности всех цепочек, ведущих к этому событию от начальной вершины.

Дерево позволяет рассматривать случайный опыт как бы по частям, мысленно расположив случайные события в некотором порядке. Очерёдность эта только мысленная, и её при желании можно поменять. Деревья очень удобны при решении задач, связанных со случайным выбором.

**ПРИМЕР 3.** Решим задачу. В группе 3 мальчика и 5 девочек. Случайным образом из группы выбирают двух человек. Какова вероятность того, что будут выбраны один мальчик и одна девочка?

**Решение.** Мысленно разобьём одновременный выбор случайной пары на два последовательных выбора и изобразим дерево случайного опыта. Выбор мальчика обозначим буквой М, а девочки — Д. При первом выборе вероятность выбрать мальчика равна $\frac{3}{8}$, а девочку — $\frac{5}{8}$. Укажем эти вероятности около рёбер $S$М и $S$Д (рис. 42).

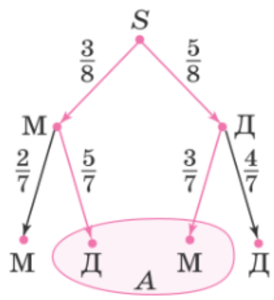


Рисунок 42

При выборе второго ребёнка вероятности появления мальчика и девочки зависят от того, кто был выбран в первый раз. Если в первый раз был выбран мальчик, то мальчиков осталось 2 из 7 человек. Поэтому во второй раз мальчик будет выбран (ребро ММ) с вероятностью $\frac{2}{7}$, а девочка будет выбрана (ребро МД) с вероятностью $\frac{5}{7}$.

Точно так же, если в первый раз была выбрана девочка, то остаётся 4 девочки и 3 мальчика из 7 оставшихся детей. Вероятности выбора мальчика и девочки теперь $\frac{3}{7}$ и $\frac{4}{7}$ соответственно.

Событию $A$ «один мальчик и одна девочка» благоприятствуют два элементарных события, которые изображаются в дереве цепочками $S$МД и $S$ДМ (выделены на рисунке 42 красным цветом). Значит,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(S\text{МД}) + \mathrm{P}(S\text{ДМ}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}.$$

## Вопросы

1. Как в дереве случайного опыта изображаются элементарные события?
2. Чему равна сумма вероятностей около рёбер, выходящих из одной вершины?
3. Сформулируйте правило вычисления вероятности элементарного события в дереве.
4. Сформулируйте правило сложения для вычисления вероятностей событий с помощью дерева.

## Задачи

**111** Симметричную монету бросают дважды.

а) Изобразите дерево этого эксперимента и подпишите около рёбер вероятности соответствующих событий.

б) Найдите цепь, изображающую элементарное событие РО.

в) Укажите в построенном дереве событие $A$ «в первый раз выпала решка».

г) Укажите в построенном дереве событие $B$ «орёл выпал хотя бы один раз».

**112** На рисунке 43 изображено дерево некоторого случайного эксперимента. Какие ошибки допущены?

**113** На рисунке 44 изображено дерево некоторого случайного опыта.

а) Перерисуйте дерево в тетрадь и подпишите недостающие вероятности около рёбер.

б) Сколько элементарных событий в этом эксперименте?

в) Пользуясь правилом умножения вероятностей, вычислите вероятности цепочек $SAC$ и $SBE$.

г) Найдите вероятность события $F$.

**114** На рисунке 45 изображено дерево некоторого случайного опыта.

а) Постройте это дерево в своей тетради и подпишите недостающие вероятности около рёбер.

б) Вычислите вероятности цепочек $SAC$ и $SAGF$.

**115** На рисунке 46 изображено дерево некоторого случайного опыта и событие $A$. Рёбра проведены пунктиром. Известно, что из каждой точки возможные переходы к следующим событиям равновероятны.

а) Перерисуйте дерево в тетрадь и подпишите около рёбер соответствующие вероятности.

б) Обведите сплошной линией цепочки, благоприятствующие событию $A$.

в) Найдите вероятность события $A$.

**116** На рисунке 47 изображено дерево некоторого случайного опыта и показаны события $A$ и $B$. Рёбра проведены пунктиром. Известно, что рёбра, исходящие из одной вершины, равновероятны.

а) Постройте это дерево в своей тетради. Обведите сплошной линией цепочки, благоприятствующие событию $A$. Другим цветом обведите цепочки, благоприятствующие событию $B$.

б) Найдите вероятность события $A$.

в) Найдите вероятность события $B$.

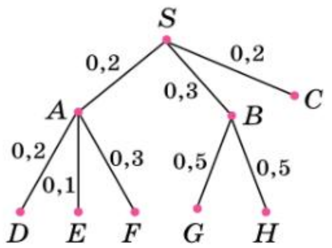



Рисунок 43

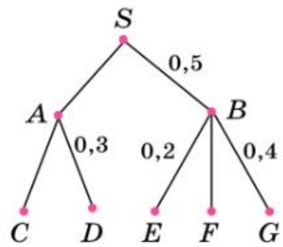



Рисунок 44

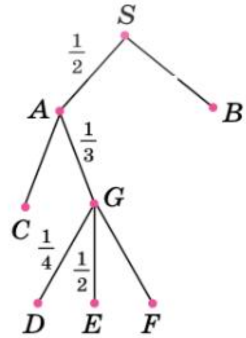



Рисунок 45

**117** Сергей Петрович гуляет по своему посёлку. Схема дорожек показана на рисунке 48. Он начинает прогулку в точке $S$ и на каждой развилке с равными шансами выбирает любую из дорожек (но не возвращается).

Найдите вероятность того, что Сергей Петрович в конце концов придёт:

а) на школьный двор;

б) к ферме;

в) на луг;

г) к ферме или к колодцу.

**118** В группе 18 человек, из них 7 мальчиков, остальные — девочки. По сигналу учителя физкультуры они быстро построились в одну шеренгу в случайном порядке. Найдите вероятность того, что на концах шеренги окажутся две девочки или два мальчика.

**119** Из ящика, где хранятся 9 жёлтых и 15 зелёных карандашей, продавец не глядя вынимает один за другим 3 карандаша. Найдите вероятность того, что:

а) 2 первых карандаша окажутся зелёными;

б) все 3 карандаша будут жёлтые;

в) цвета будут чередоваться в порядке жёлтый — зелёный — жёлтый.

**120** На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что очередная произведённая тарелка попадёт в продажу.

**121** На заводе производят электрические лампочки, причём 5% всех изготовленных лампочек неисправны. Система контроля качества выявляет все неисправные лампочки, но по ошибке бракует ещё 1% исправных лампочек. Все забракованные лампочки поступают в переработку, а остальные — в продажу. Найдите вероятность того, что очередная изготовленная лампочка отправится в переработку.

**122** Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Эта система бракует 99% неисправных батареек и по ошибке бракует 3% исправных батареек. Найдите вероятность того, что очередная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

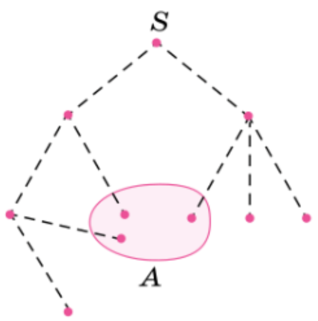


Рисунок 46

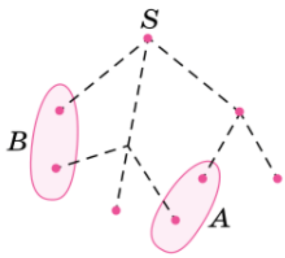


Рисунок 47

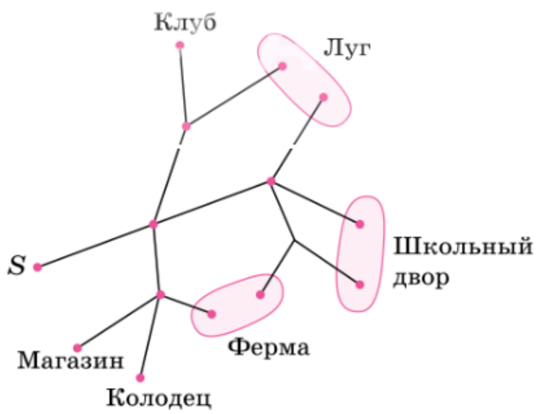


Рисунок 48

**123** В торговом центре рядом друг с другом установлены два автомата, продающие кофе в стаканчиках. Вероятность того, что к концу дня кофе закончится в первом автомате, равна 0,2. Если это случилось, то нагрузка на второй автомат растёт, и кофе может закончиться в нём с вероятностью 0,8. Найдите вероятность того, что:

а) к концу дня в обоих автоматах закончится кофе;

б) к концу дня кофе закончится только в первом автомате.

***Указание.*** Найдите сначала условную вероятность того, что кофе во втором автомате не закончится.

**124** В семье двое детей. Известно, что среди них есть мальчик. Найдите вероятность того, что второй ребёнок тоже мальчик (считайте, что рождение мальчика и девочки равновозможны).

**125** В коробке было 2 красных и 3 синих фломастера. Ваня не глядя достал из коробки 2 фломастера, причём оказалось, что среди них есть синий. Какова вероятность, что Ваня достал:

а) 2 синих фломастера; б) 1 красный и 1 синий?

**126** На двух заводах изготавливают одинаковые лампочки для автомобильных фар. 30% всех лампочек делают на первом заводе, остальные — на втором. В среднем 10% продукции первого завода и 20% продукции второго завода поступают в торговую сеть «Автоимидж». Найдите вероятность того, что лампочка, купленная в магазине сети «Автоимидж», произведена на первом заводе.

# 57 Независимые события

В жизни мы часто встречаемся с ситуациями, когда события каким-то образом связаны между собой. По наступлению одного события можно судить об изменении вероятности другого. Например, если небо ясное, то мы считаем вероятность дождя небольшой. Но как только сгустились тучи, мы заново оцениваем вероятность дождя и считаем, что теперь она высокая.

Если мы бросаем игральную кость, то вероятности выпадения 3 и 6 очков одинаковы и равны $\frac{1}{6}$. Но если нам сказали (мы сами не видели), что выпало больше чем 4 очка, то вероятность 6 очков выросла до $\frac{1}{2}$, а выпадение 3 очков стало невозможным событием: условная вероятность этого стала равна нулю.

Бывают события, которые не зависят друг от друга. Например, при бросании двух костей результат бросания первой кости не влияет на число очков, выпавших на второй кости. Про такие события говорят, что они **независимы**.

Разумно считать, что события $A$ и $B$ независимы, если наступление одного из них не влияет на вероятность другого.

Если вероятности событий $A$ и $B$ больше нуля, то независимость событий $A$ и $B$ можно выразить равенствами

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \text{ и } \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B).$$

Но тогда из известных нам формул

$$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B) \text{ и } \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)$$

получается равенство $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$.

Это равенство мы возьмём за определение независимости двух событий[1].

Два события $A$ и $B$ называются **независимыми**, если вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Часто независимые события возникают, когда случайный опыт состоит из нескольких независимых случайных испытаний.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим двукратное бросание игральной кости и два события: событие $A$ «в первый раз выпало более трёх очков» и событие $B$ «во второй раз выпало менее трёх очков». Будут ли события $A$ и $B$ независимыми? С помощью таблицы (рис. 49) находим, что

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B) = \frac{1}{3} \text{ и } \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

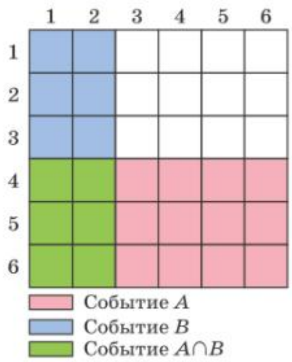



Рисунок 49

Значит, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$, то есть события $A$ и $B$ независимы.

Независимые события встречаются не только при независимых испытаниях. Поясним это на примере.

**ПРИМЕР 2.** Наудачу выбираем число из ряда от 1 до 100. Пусть событие $A$ состоит в том, что это число чётное; событие $B$ — что это число делится на 5.

Покажем, что события $A$ и $B$ независимы. Нужно найти вероятности $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A \cap B)$ и убедиться в том, что выполняется равенство

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

**Решение.** Среди 100 первых натуральных чисел всего $100 : 2 = 50$ чётных чисел и $100 : 5 = 20$ чисел, которые делятся на 5. Поэтому

$$\mathrm{P}(A) = \frac{50}{100} = 0{,}5 \text{ и } \mathrm{P}(B) = \frac{20}{100} = 0{,}2.$$

Произведение равно 0,1:

$$\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1.$$

Событие $A \cap B$ состоит в том, что выбранное число делится и на 2, и на 5, т. е. оно делится на 10. Среди первых 100 натуральных чисел всего $100 : 10 = 10$ чисел, кратных 10. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{10}{100} = 0{,}1.$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}1 \text{ и } \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1.$$

Получаем, что

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

[1] Аналогично можно говорить о **независимости трёх, четырёх и более событий**. Если вероятность пересечения любого набора этих событий равна произведению их вероятностей, то события называются независимыми.

Значит, события $A$ и $B$ независимы.

Так получилось потому, что число 100 делится и на 2, и на 5. Если бы мы выбирали числа не из 100, а, например, из 99 первых натуральных чисел, то это был бы другой случайный опыт, и события $A$ и $B$ не были бы независимыми. Проверьте это.

Не следует путать независимые и несовместные события. Несовместные события, как правило, зависимы: если произошло одно из них, то мы заведомо знаем, что не произошло другое.

Чаще о независимости событий судят не по тому, выполняется или нет равенство $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, а по тому, как устроен случайный опыт, в котором эти события наступают.

## Вопросы

1 Дайте определение независимых событий.

2 События $A$ и $\overline{A}$ имеют положительные вероятности. Могут ли события $A$ и $\overline{A}$ быть независимыми?

3 Являются ли элементарные события в случайном опыте независимыми событиями?

## Задачи

**127** События $U$ и $V$ независимы. Найдите вероятность события $U \cap V$, если:
а) $P(U) = 0{,}4$, $P(V) = 0{,}6$; б) $P(U) = 0{,}1$, $P(V) = 0{,}8$.

**128** События $K$ и $L$ независимы. Найдите вероятность события $K$, если:
а) $P(L) = 0{,}8$, $P(K \cap L) = 0{,}48$; б) $P(L) = 0{,}2$, $P(K \cap L) = 0{,}08$.

**129** События $U$, $V$ и $W$ независимы. Найдите вероятность события $U \cap V \cap W$, если:
а) $P(U) = 0{,}4$, $P(V) = 0{,}6$, $P(W) = 0{,}5$;
б) $P(U) = 0{,}4$, $P(V) = 0{,}3$, $P(W) = 0{,}1$.

**130** События $K$, $L$ и $M$ независимы. Найдите вероятность события $K$, если:
а) $P(L) = 0{,}8$, $P(M) = 0{,}6$, $P(K \cap L \cap M) = 0{,}096$;
б) $P(L \cap M) = 0{,}1$, $P(K \cap L \cap M) = 0{,}06$.

**131** Монету бросают 2 раза. Являются ли независимыми события:
а) $A$ «в первый раз выпадет орёл» и $B$ «во второй раз выпадет решка»;
б) $A$ «при первом броске выпадет орёл» и $B$ «орёл выпадет хотя бы один раз»?

**132** Игральную кость бросают дважды. Являются ли независимыми события:
а) $A$ «при первом броске выпадет шестёрка» и $B$ «при втором броске выпадет меньше трёх очков»;
б) $A$ «при первом броске выпадет больше трёх очков» и $B$ «сумма выпавших очков меньше девяти»?

**133** Случайным образом выбираем натуральное число от 1 до 24. Событие $C$ — «число чётное». Являются ли события $C$ и $D$ независимыми, если событие $D$ состоит в том, что:
а) выбранное число делится на 3;
б) выбранное число делится на 7?

**134** Бросают одну игральную кость. Событие $A$ — «выпадет чётное число очков». Являются ли независимыми события $A$ и $B$, если событие $B$ состоит в том, что:

а) выпадет число очков, кратное 3;

б) выпадет число очков, кратное 5?

**135** Вероятность того, что лампочка в люстре перегорит в течение года, равна 0,2. Считая, что лампочки перегорают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что в течение года перегорят все лампочки в люстре, если в люстре:

а) 2 лампочки; б) 3 лампочки; в) 5 лампочек.

**136** Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не собьёт её. Рассмотрим события $A$ «стрелку потребовалось не более трёх выстрелов» и $B$ «стрелку потребовалось не более пяти выстрелов». Являются ли события $A$ и $B$ независимыми?

**137** В некотором случайном опыте вероятность события $A$ равна 0,4, вероятность события $B$ равна 0,5. Известно, что события $A$ и $B$ независимы. Найдите вероятность события $A \cup B$.

**138** События $A$ и $B$ независимы. Докажите, что независимы события $A$ и $\overline{B}$.

## 58* Об ошибке Эдгара По и о том, как победить стечение обстоятельств

Знаменитый автор детективов Э. А. По в эпилоге рассказа «Тайна Мари Роже» рассуждает о вероятностях, возникающих при бросаниях костей, таким образом: *«...обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестёрки делает почти невероятным выпадение её в третий раз и даёт все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект не может этого воспринять, он не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий ещё пока только в будущем...»*

Разумеется, в ошибку впадает сам Эдгар По. Эта ошибка известна как **ошибка игрока**. Действительно, вероятность выпадения трёх шестёрок мала. Она равна

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}.$$

Однако если шестёрка уже выпала 2 раза подряд, то условная вероятность выпадения трёх шестёрок стала равна $\frac{1}{6}$ — она совпадает с вероятностью выпадения только одной шестёрки. Когда выпали две первые шестёрки, условия опыта изменились, и вероятность трёх шестёрок теперь уже не является пренебрежимо малой. Теперь вовсе нет «оснований поставить против этого любую сумму».

Впасть в ошибку, похожую на ошибку Эдгара По, очень просто. Считая опасность маловероятной, практически невозможной, люди забывают, что по мере наступления различных неблагоприятных событий вероятность наступления опасного события может увеличиваться.

При создании систем безопасности и защиты используются свойства независимых событий.

Чтобы многократно уменьшить вероятность катастрофы, все жизненно важные системы автомобилей, судов и самолётов дублируются. При этом каждая такая система не зависит от работы остальных. Поломки двух независимых систем также являются независимыми.

**ПРИМЕР.** Предположим, что в автомобиле два независимых тормозных контура[1] и вероятность отказа одного из них при нажатии на тормоз равна 0,00001. Это большая вероятность. Если бы тормоза в автомобилях отказывали с такой частотой, то в крупных городах аварии из-за отказа тормозов случались бы много раз в день.

Но вероятность одновременного отказа двух контуров равна

$$0{,}000001^2 = 0{,}000000000001 = 10^{-12}.$$

Эта вероятность ничтожна, поэтому тормозные системы современных автомобилей считаются надёжными даже в условиях интенсивного движения в современных мегаполисах.

В автомобилях два независимых тормозных контура. В пассажирских самолётах по меньшей мере два двигателя, две системы электроснабжения, две системы управления, два пилота. И всё равно... Мы слышим, что автокатастрофа случилась из-за неисправности тормозов. Мы удивляемся — как же так, ведь тормоза продублированы! А на самом деле один тормозной контур в этом автомобиле не работал уже год, а владелец всё никак не находил времени отдать машину в ремонт.

При взлёте разбился самолёт — несчастливое стечение обстоятельств. Плохая погода, обледенел датчик давления на крыле, пилот ошибся в оценке высоты и скорости, диспетчер не проверил информацию... Каждая из этих неприятностей вполне вероятна и сама по себе ещё не смертельна. А вот вероятность совпадения всех независимых обстоятельств событий ничтожна. Но когда случилось одно из них, вероятность катастрофы многократно возросла. Случилось ещё одно — вероятность несчастья ещё увеличилась, но ни на земле, ни в воздухе этого не знали.

Есть много неприятных обстоятельств, которые никто не может ни предусмотреть, ни предотвратить. Но есть и такие, про которые говорят — «человеческий фактор». Обычно это словосочетание звучит, когда кто-то понадеялся на опыт, надёжность, везение, а надежды не оправдались.

Многие из вас, ребята, скоро сядут за руль автомобиля. Кто-то будет поднимать в воздух тяжёлые самолёты. Другие поведут железнодорожные составы, морские и речные суда. Кто-то будет проектировать или строить здания и сооружения, корабли, самолёты и автомобили. А кто-то будет принимать важные решения.

От ошибок не застрахован никто, но уменьшить вероятность беды можно. Для этого **не следует оставлять на волю случая то, что должно быть вовремя предусмотрено и сделано человеком**.

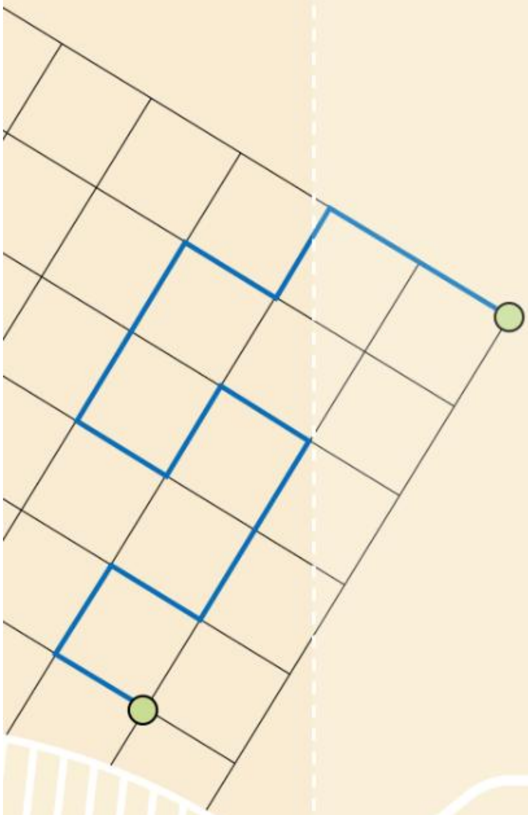
## Вопросы

**1** В чём состоит ошибка Эдгара По?

**2** Приведите примеры дублирования важных систем. Зачем это делается?

[1] Тормозной контур — гидравлический привод тормозов. Обычно один контур приводит в действие тормоза передних колёс, а второй — задних.

# XIV Элементы комбинаторики



Часто приходится иметь дело с комбинациями, составленными из фигур, чисел, событий или предметов. Предметов может быть много, но комбинаций из них несравнимо больше. Их бывает так много, что невозможно упорядочить или пересчитать их непосредственно.

Перечислением и подсчётом комбинаций элементов разных множеств занимается специальный раздел математики — комбинаторика. В теории вероятностей комбинаторика применяется, когда событий в случайном опыте очень много и их невозможно выписать или даже просто перечислить без специальных методов.

Имея дело с большим количеством чисел, фигур, событий или просто предметов, часто приходится составлять из них различные комбинации, которые составляют новое множество.

Эти комбинации трудно упорядочивать или пересчитывать непосредственно — их очень много. Нужно научиться перечислять комбинации так, чтобы не запутаться, не забыть ни одной и не посчитать одну и ту же дважды.

Методы перечисления и упорядочивания множеств, составленных из чисел, фигур или предметов, изучаются в специальном разделе математики, который называется **комбинаторика**. Типичной задачей комбинаторики является перечисление комбинаций, составленных из нескольких предметов.

В теории вероятностей комбинаторика применяется тогда, когда случайный опыт обширный и количество событий в нём настолько велико, что их невозможно выписать или даже просто перечислить без применения специальных методов.

## 59 Комбинаторное правило умножения

В главе VII (п. 35*) мы познакомились с **правилом умножения**. Напомним его.

**Комбинаторное правило умножения.** Если множество $A$ состоит из $n$ элементов, а множество $B$ — из $k$ элементов, то множество всех упорядоченных пар $(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$, состоит из $nk$ элементов.

**ПРИМЕР 1.** Предположим, что есть белый хлеб, чёрный хлеб, сыр, колбаса и варенье. Сколько разных бутербродов (хлеб и что-то одно сверху) можно приготовить?

Выпишем сначала бутерброды с белым хлебом. Это бутерброд с сыром (БС), с колбасой (БК) и с вареньем (БВ). Столько же бутербродов можно приготовить и с чёрным хлебом: ЧС, ЧК и ЧВ.

Всего получается 6 разных бутербродов. Это число можно найти с помощью правила умножения.

В данном случае у нас два вида хлеба и три вида дополнений к хлебу. Получается: $2 \cdot 3 = 6$.

Такое же правило действует, если имеются предметы трёх или более типов.

**Комбинаторное правило умножения для нескольких множеств.** Чтобы найти число всех упорядоченных наборов элементов трёх или более множеств, нужно перемножить количества элементов в этих множествах.

Поясним это правило на примере — пересчитаем государственные регистрационные автомобильные номера в Новосибирской области.

**ПРИМЕР 2.** Государственные регистрационные автомобильные номера состоят из буквы, трёх цифр, ещё двух букв и номера региона. Буквы и цифры могут повторяться. Буквы берутся не всякие. Можно использовать только 12 букв: А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х. (Почему именно эти буквы? Попробуйте догадаться.) Цифры можно брать любые — от 0 до 9. Номер региона на автомобильном номере в Новосибирской области может быть 54 или 154.

Сколько всего можно составить регистрационных номеров для автомобилей в Новосибирской области?

Будем рассуждать так же, как и в предыдущем примере: первую букву можно взять одну из 12. Первую цифру берём одну из 10, вторую — снова одну из 10 и третью — снова одну из 10. Затем две буквы подряд. Каждая выбирается из 12 разрешённых букв. И наконец, номер региона. Он может оказаться одним из двух.

$$12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 12^3 = 3\ 456\ 000.$$

Номер региона не присваивается произвольно. Сначала всем новосибирским автомобилям присваивали номер 54, поскольку Новосибирская область является 54-м субъектом Российской Федерации. Впоследствии, когда эти номера были исчерпаны, стали давать номер 154. Возможно, скоро потребуются номера 254 или 754.

## Вопросы

**1** Сформулируйте комбинаторное правило умножения для подсчёта числа комбинаций предметов двух множеств.

**2** Сформулируйте комбинаторное правило умножения для нескольких множеств.

## Задачи

**139** Сколько можно составить пар, выбирая:

а) первый предмет из 4, а второй из 8 предметов;

б) первый предмет из 6, а второй из 3 предметов;

в) первый предмет из 15, а второй из 12 предметов;

г) первый предмет из 10 предметов, а второй из всех оставшихся после выбора первого предмета?

**140** Сколько можно составить троек, выбирая:

а) первый предмет из 4, второй из 8, а третий из 5 предметов;

б) первый предмет из 7, второй из 4, а третий из 9 предметов;

в) первый предмет из 5, второй из 13, а третий из 21 предмета;

г) первый предмет из 8 предметов, второй и третий из оставшихся после выбора предыдущих?

**141** В школе есть все классы — с 1 по 11. Каждый из них имеет дополнительную букву А, Б, В, Г или Д. Например, класс 1А, 7Б и т. д. Сколько всего классов в этой школе?

**142** В автоматических камерах хранения на железнодорожных вокзалах применяется шифр, который состоит из одной буквы и трёх цифр. Буквы берутся от А до К, исключая буквы Ё и Й, а цифры могут быть любыми — от 0 до 9. Например, Д195.

Сколько можно составить различных шифров?

**143** На день школы каждая девочка подарила каждому мальчику открытку, а каждый мальчик подарил каждой девочке гвоздику. Чего было больше — подаренных открыток или подаренных гвоздик?

**144** Составляются различные последовательности из цифр 0 и 1 (**двоичные последовательности**). Сколько существует двоичных последовательностей длины:

а) 1; б) 3; в) 10; г) $n$?

**145** На приёме в посольстве встретились две делегации, в каждой из которых было несколько дипломатов (больше одного). Каждый дипломат одной делегации пожал руку каждому дипломату второй делегации. Сколько было членов в каждой делегации, если всего произошло 143 рукопожатия?

***Указание.*** Если в первой делегации было $x$ дипломатов, а во второй — $y$, то всего рукопожатий было $xy$. Число 143 можно разложить на натуральные множители двумя способами: $143 = 1 \cdot 143$ и $143 = 11 \cdot 13$.

**146** Важные данные в компьютере часто защищают паролем. Для пароля можно использовать большие и малые латинские буквы, цифры, некоторые знаки. Всего разрешённых символов 92. Составьте числовое выражение для общего числа возможных паролей, состоящих из 8 символов. Пользуясь калькулятором, вычислите приближённо его значение.

## 60 Перестановки. Факториал

Подсчитаем, сколько существует разных способов построить трёх человек в шеренгу. Воспользуемся комбинаторным правилом умножения. На первое место можно поставить любого из трёх человек. На второе — любого из двух оставшихся. И на последнее место можно поставить только одного оставшегося человека. Первого человека можно выбирать тремя способами, второго — двумя способами, а третьего — одним-единственным способом.

Таким образом, мы получили $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов перестановки трёх человек. На рисунке 50 показаны все эти способы.


Рисунок 50

Если людей четверо, то первый номер мы можем присвоить любому из четверых, а оставшиеся номера распределить шестью способами между тремя оставшимися. Получаем $4 \cdot 6 = 24$ способа нумерации. Остаётся напомнить, что 6 мы получали как $3 \cdot 2 \cdot 1$.

Продолжая рассуждения тем же способом, мы обнаружим, что если людей, например, семеро, то из них можно составить $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ различных **перестановок.**

**Перестановкой** из $n$ предметов называется любой способ нумерации этих предметов (способ их расположения в ряд).

Обобщим полученные результаты. Если есть $n$ предметов, то число способов перенумеровать их равно $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

**Факториалом** натурального числа $n$ называется произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$. Обозначается факториал $n!$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Для того чтобы в различных формулах не делать исключения для числа 0, принято соглашение $0! = 1$.

Получается, мы доказали теорему.

**Число перестановок** $n$ предметов равно $n!$.

Приведём таблицу факториалов от 0 до 10.

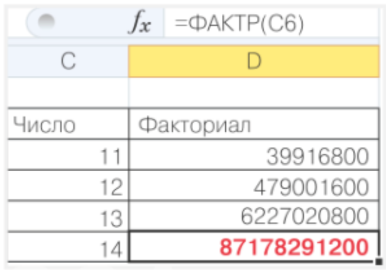
Таблица 2. **Факториалы чисел от 0 до 10**

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!$ | 1 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40 320 | 362 880 | 3 628 800 |

Факториал $n!$ быстро растёт с увеличением $n$. Поэтому даже для 10 предметов перестановок очень много и выписать все практически невозможно.

В электронных таблицах факториалы вычисляются с помощью функции

ФАКТР()




## Вопросы

**1** Что такое перестановка?

**2** Что такое факториал натурального числа?

**3** Чему равно число различных перестановок из $n$ предметов?

**4** Чему равен факториал нуля?

## Задачи

**147** Саша, Ваня и Петя получили номера 1, 2 и 3 для участия в соревнованиях. Перечертите таблицу 3 в тетрадь и запишите все возможные способы распределения этих номеров между участниками.

Таблица 3

| | 1-й способ | 2-й способ | 3-й способ | 4-й способ | 5-й способ | 6-й способ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Саша** | | | | | | |
| **Ваня** | | | | | | |
| **Петя** | | | | | | |

**148** В автосервис одновременно приехали 3 машины для ремонта. Сколько существует способов выстроить их в очередь на обслуживание?

**149** Сколько есть способов раздать пяти хоккеистам номера с 1-го по 5-й?

**150** Участники лыжных соревнований стартуют с интервалом в 30 секунд. Чтобы определить порядок старта, спортсмены тянут жребий, определяющий номер старта. Сколько существует различных последовательностей выхода лыжников на старт, если в соревнованиях принимают участие:

а) 6 лыжников; в) 10 лыжников;

б) 8 лыжников; г) $k$ лыжников?

**151** Сколько различных последовательностей (не обязательно осмысленных) можно составить из букв слова:

а) учебник; в) фонарь;

б) автор; г)* бабуин?

**152** Вычислите значение дроби:

а) $\frac{5!}{2!}$; б) $\frac{7!}{5!}$; в) $\frac{10!}{8!}$; г) $\frac{100!}{99!}$; д) $\frac{15!}{13!\ 2!}$; е) $\frac{12!}{3!\ 9!}$.

**153** Выпишите все натуральные делители числа: а) 4!; б) 5!.

**154** Докажите, что если $n < m$, то $m!$ делится на $n!$ без остатка.

**155** В классе 30 человек. Среди них нет двоих одинакового роста. По команде учителя физкультуры они выстраиваются в одну шеренгу в случайном порядке. Найдите вероятность того, что они встали по росту.

**156** В страховой компании проходит рекламная акция: компьютер случайным образом выбирает автомобильный номер, и владелец автомобиля с таким номером получает скидку. Найдите вероятность того, что счастливым окажется номер «В 845 МА».

**157** Какова вероятность того, что среди последних четырёх цифр в семизначном номере телефона есть цифра 8?

**158** Найдите вероятность того, что трёхзначный номер случайно проезжающей мимо машины состоит из цифр 0, 4 и 5, взятых в произвольном порядке.

**159** Найдите вероятность того, что среди трёх последних цифр случайного телефонного номера не окажется:

а) цифры 0; в) цифр 1 и 6;

б) цифры 2; г) цифр 2, 5 и 7.

**160** Какова вероятность того, что среди последних трёх цифр случайного телефонного номера:

а) встретится цифра 7;

б) встретится цифра 2 или цифра 3;

в) встретится хотя бы одна из цифр 4, 0 или 1;

г) будет хотя бы одна из цифр 1, 2, 4 и 9?

**161** Десять школьников в случайном порядке заходят на экзамен. Каждый из них называет фамилию (однофамильцев нет). Председатель экзаменационной комиссии записывает на листочке фамилии в том порядке, в каком входят школьники. Найдите вероятность того, что фамилии окажутся записаны:

а) в алфавитном порядке;

б) в порядке, обратном алфавитному.

**162** У вахтёра в комнате доска с крючками. Всего 12 крючков, а на них 12 ключей. Доска упала и ключи рассыпались. Вахтёр собрал ключи и развесил их в случайном порядке. Какова вероятность того, что:

а) каждый ключ висит на своём крючке;

б) хотя бы один ключ висит не на своём крючке;

в) два определённых ключа перепутаны местами, а остальные висят на своих крючках;

г) ровно один ключ висит не на своём крючке, а остальные — на своих.

**163** Слово «АПЕЛЬСИН» написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Девочка, играя, выложила буквы в ряд в случайном порядке. Найдите вероятность того, что получилось слово «СПАНИЕЛЬ».

**164** Найдите вероятность того, что среди последних четырёх цифр случайного семизначного телефонного номера есть ровно одна цифра 1 и ровно одна цифра 7.

# 61 Число сочетаний и треугольник Паскаля

**ПРИМЕР 1.** Из трёх игроков, заявленных на теннисный матч, надо выбрать двух для выступления в парном разряде[1] (порядок игроков не важен). Сколькими способами это можно сделать?

**Решение.** Обозначим игроков различными буквами A, B, C и выпишем все возможные комбинации:

AB AC BA BC CA CB

Сначала мы брали игрока A и добавляли к нему в пару ещё одного из двух оставшихся игроков. Так получились первые две пары AB и AC в нашем списке. Затем мы взяли игрока B и к нему добавляли одного из двух оставшихся. Так получились пары BA и BC. Наконец, первым поставили игрока C и добавляли к нему одного из оставшихся игроков. Получили последние две пары CA и CB.

Однако среди полученных таким образом комбинаций получились перестановки одной и той же пары. Например, AB и BA — это одна и та же пара. Совпадают и другие пары: AC и CA, а также BC и CB. Таким образом, всего различных пар три:

AB AC BC

Общее число комбинаций букв A, B и C сократилось в 2 раза. Это произошло потому, что из двух разных букв можно составить ровно две перестановки.

**ПРИМЕР 2.** Сколькими способами можно выбрать двух игроков из четырёх заявленных на матч?

**Решение.** Обозначим игроков A, B, C и D. Начнём, как и в предыдущем примере, составлять пары. Первого игрока мы можем выбрать четырьмя способами. Вторым к нему мы можем взять любого из оставшихся трёх:

| | | |
|---|---|---|
| AB | AC | AD |
| BA | BC | BD |
| CA | CB | CD |
| DA | DB | DC |

[1] Парный разряд в большом теннисе — это игра «двое на двое»: пара игроков играет против пары соперников.

Получилось 12 комбинаций. При этом, как и в предыдущем примере, каждая пара посчитана дважды. Поэтому различных пар всего 6:

AB AC AD BC BD CD

Число способов, которыми можно выбрать ровно $k$ предметов из множества, в котором $n$ предметов, называется **числом сочетаний** из $n$ по $k$ и обозначается $C_n^k$ (читается «цэ из эн по ка»).

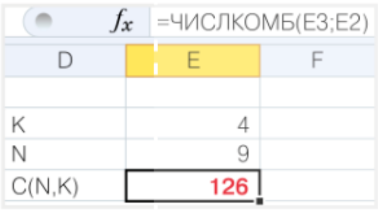
До сих пор мы установили, что $C_3^2 = 3$ и $C_4^2 = 6$. Как быть в других случаях?

Если число $n$ небольшое, то число сочетаний $C_n^k$ можно взять из треугольной таблицы, которая называется **треугольником Паскаля**[1].

Обычно треугольник Паскаля изображают в виде равнобедренного треугольника, поэтому столбцы в треугольнике получаются наклонные. Число $C_n^k$ стоит в $n$-й строке и в $k$-м столбце. Например, чтобы найти $C_6^4$, посмотрим, какое число стоит на пересечении 6-й строки и 4-го столбца. Это число 15. Значит, $C_6^4 = 15$ (рис. 51).

Чтобы найти число сочетаний с помощью электронной таблицы, удобно использовать функцию

ЧИСЛКОМБ()




4-й столбец

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

6-я строка 1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Рисунок 51. **Треугольник Паскаля**

Столбцы и строки треугольника Паскаля нумеруются начиная с нуля.

Если число $n$ велико, то лучше пользоваться формулой $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

**ПРИМЕР 3.** Найдём $C_9^4$.

**Решение.** По формуле получаем $C_9^4 = \dfrac{9!}{4!(9-4)!} = \dfrac{9!}{4!\cdot 5!} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126.$

Это же значение можно найти в треугольнике Паскаля (см. рис. 51) на пересечении 9-й строки и 4-го столбца.

Вы, наверное, обратили внимание на то, что каждая строка треугольника Паскаля начинается и заканчивается единицей. Это не случайно: $C_n^0 = 1$, поскольку выбрать 0 предметов можно единственным способом.

[1] Числовой треугольник, содержащий числа сочетаний, известен по крайней мере с X в. В арабских трудах он появляется не позже XII в. В Иране его называют треугольником Хайама, в Китае — треугольником Яна Хуэя. Мы называем этот треугольник треугольником Паскаля по имени французского учёного Блеза Паскаля, который в середине XVII в. издал «Трактат об арифметическом треугольнике», где подробно описал его свойства.

Так же $C_n^n = 1$, потому что выбрать все $n$ предметов из $n$ имеющихся можно тоже только одним способом.

## Вопросы

**1** Что такое число сочетаний?

**2** Как обозначить число сочетаний из 6 по 5?

## Задачи

**165** Найдите:

а) $C_4^3$; б) $C_5^2$; в) $C_7^5$; г)* $C_{11}^3$; д)* $C_{12}^6$; е)* $C_{12}^8$.

**166** Сравните числа:

а) $C_5^2$ и $C_5^3$; б) $C_7^2$ и $C_7^5$; в)* $C_{21}^1$ и $C_{21}^{20}$; г)* $C_{12}^5$ и $C_{12}^7$.

**167** Найдите значение:

а) $C_4^0$; б) $C_5^5$; в) $C_{23}^0$; г) $C_{34}^{34}$; д) $C_{302}^0$; е) $C_{101}^{101}$.

**168** Сколько существует способов выбрать один объект из совокупности:

а) 50 предметов; б) 67 предметов?

**169** Сколькими способами можно выбрать:

а) 49 предметов из 50; б) 64 предмета из 65?

**170** Сколькими способами можно выбрать:

а) 7 предметов из 9; в)* 4 предмета из 12;

б) 2 предмета из 6; г)* 5 предметов из 13?

**171** Сколькими способами можно отобрать стартовую шестёрку игроков в волейбольном матче, если всего в команде:

а) 10 игроков; б)* 14 игроков?

**172** Предприниматель хочет отправить рекламные объявления в 3 газеты. Сколькими способами можно выбрать эти 3 газеты из:

а) 6 газет; б) 7 газет; в) 10 газет?

**173** Сколько существует способов составить двоичную последовательность из:

а) 5 единиц и 4 нулей; в) 2 нулей и 8 единиц;

б) 3 единиц и 7 нулей; г) 5 нулей и 5 единиц?

**174** Сколько существует последовательностей из шести букв, в которых:

а) три буквы У, остальные буквы Н;

б) пять букв У, остальные буквы Н?

**175** Муха ползёт по проволочной решётке из точки $A$ в точку $B$ (рис. 52), двигаясь всё время вправо или вниз. Сколько различных маршрутов может выбрать муха?

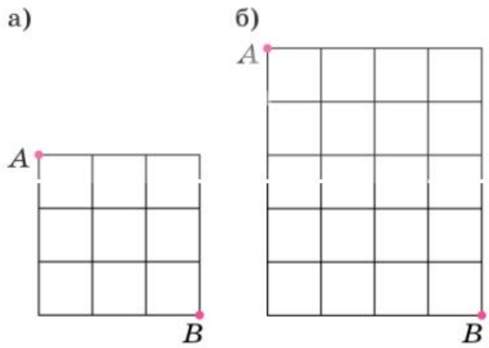



Рисунок 52

*Указание.* В случае а), как бы ни ползла муха, она должна сделать всего 6 шагов: три шага вправо (П) и три шага вниз (Н). Маршрут мухи можно записать в виде последовательности шести букв. Например, ПНПННП.

Таким образом, вопрос сводится к тому, сколько существует способов расставить три буквы П в последовательности шести букв.

**176** Сколько существует последовательностей, в которых 4 буквы У, а остальные буквы Н, если всего в последовательностях:

а) 11 букв; б) 12 букв; в) 15 букв; г) 20 букв?

**177** В лотерее разыгрывается несколько выигрышных номеров из общего количества номеров. Сколько всего существует комбинаций выигрышных номеров, если:

а) разыгрываются 5 номеров из 36; б) разыгрываются 6 номеров из 49?

**178** Одно время была популярна лотерея «Честная игра». В билете лотереи имеется 20 закрытых букв, ровно 10 из них — буквы слова «АВТОМОБИЛЬ». Буквы разбросаны случайным образом. По правилам лотереи, если владелец билета, открыв ровно 10 букв, откроет все буквы слова «АВТОМОБИЛЬ», то он выигрывает машину.

а) Сколько всего существует способов открыть 10 букв?

б) Сколько существует способов открыть 10 букв так, чтобы выиграть автомобиль?

в) Какова вероятность выиграть автомобиль?

**179** В группе пять человек: Ваня, Саша, Маша, Таня и Коля. По жребию двое из них выбраны дежурными. Найдите вероятность того, что это Ваня и Таня.

**180** В ящике 4 красных и 2 жёлтых флажка. Из него наудачу извлекают 3 флажка. Какова вероятность того, что все эти флажки красные?

**181** Для участия в телевикторине случайным образом выбирают 3 игроков из 8 претендентов. Какова вероятность того, что будут выбраны 1-й, 4-й и 8-й игроки?

**182** В тираже лотереи «Спортлото» разыгрывались 6 случайных номеров из 49.

а) В кинокомедии «Спортлото-82» главный герой зачёркивает номера 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Найдите вероятность того, что в тираже выиграют именно эти шесть номеров.

б) Какова вероятность того, что в тираже лотереи выиграют номера 4, 28, 17, 8, 12, 32? Отличается ли она от вероятности выигрыша комбинации 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

**183** На двери установлен кодовый замок с кнопками. На кнопках изображены цифры от 0 до 9. Чтобы открыть дверь, нужно одновременно нажать три кнопки неизвестного нам кода. Найдите вероятность открыть дверь с первой попытки, нажав три кнопки наудачу.

**184** На книжной полке 6 романов и 4 повести, расположенные в случайном порядке. С полки сняли 7 первых попавшихся книг. Найдите вероятность того, что на полке остались:

а) только повести; б) только романы.

*Указание.* а) Элементарным событием будем считать комбинацию из трёх оставшихся на полке книг. Всего таких комбинаций $C_{10}^3$. Событию «остались только повести» благоприятствуют $C_4^3$ элементарных событий, поскольку повестей всего 4.

**185** Известно, что последние четыре цифры в семизначном телефонном номере некоторого абонента — это 1, 2, 3 и 4. Найдите вероятность того, что номер оканчивается на 43 или 34.

**186** В партии из 15 деталей 3 детали бракованные. Покупатель приобрёл 5 деталей. Найдите вероятность того, что среди них:

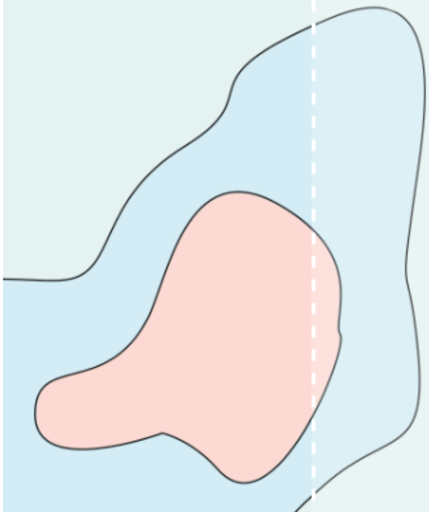
а) нет ни одной бракованной; в) ровно 2 бракованные детали;

б) есть хотя бы одна бракованная; г) ровно 3 бракованные детали.

# XV Геометрическая вероятность

Иногда случайный опыт можно представить как выбор точки из некоторой фигуры на плоскости или из промежутка на прямой. В таком опыте каждое отдельное элементарное событие имеет нулевую вероятность, поэтому обычный способ подсчёта вероятностей не подходит. На помощь приходит геометрическая вероятность.

Интересно, что в геометрических случайных опытах удобно считать, что событие и фигура — это одно и то же. Вероятности на плоскости измеряются отношением площадей фигур, на прямой — отношением длин промежутков.





# 62 Выбор точки из фигуры на плоскости

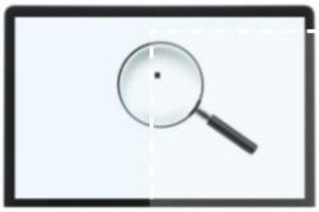


Рисунок 53. **Неисправный пиксель на экране компьютера**

Бывает так, что какой-то отдельный пиксель на экране компьютерного монитора или смартфона перестаёт работать. Тогда на экране появляется чёрная точка (рис. 53). Можно поставить вопрос о вероятности того, что неисправный пиксель попадёт в определённую область экрана.

Пикселей на экране может быть больше миллиона. Удобно считать, что мы имеем дело с точкой, выбранной случайным образом из прямоугольника.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим опыт: из прямоугольника со сторонами 3 и 4 выбирают случайную точку (рис. 54). Какова вероятность того, что эта точка попала в левый нижний квадрат со стороной 1?

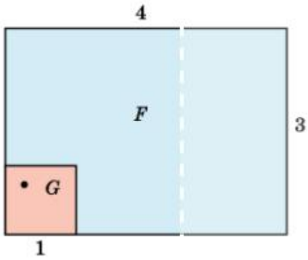



Рисунок 54

В этой задаче речь идёт о так называемой **геометрической вероятности**. Элементарными событиями в этом случайном опыте являются точки прямоугольника. Их бесконечно много, и вероятность выбрать каждую конкретную точку равна нулю.

Мы столкнулись с опытом, в котором элементарные события имеют нулевые вероятности, но не являются невозможными.

Определить вероятность событий в этом опыте с помощью суммы вероятностей элементарных событий нельзя. Нужен другой способ.

Рассмотрим более общий опыт. На плоскости дана фигура $F$, которая имеет ненулевую площадь. Из фигуры $F$ выбирают одну случайную точку. Какова вероятность того, что выбранная точка принадлежит фигуре $G$, которая содержится в фигуре $F$ (рис. 55)?

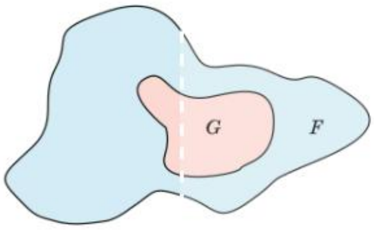



Рисунок 55

Ответ зависит от того, как мы понимаем, что такое «случайно выбранная точка». Если мы считаем, что все точки должны «иметь равные шансы», то нужно принять следующее правило:

**!** Вероятность события «выбранная точка принадлежит фигуре $G$» прямо пропорциональна площади фигуры $G$ и не зависит от расположения и формы фигуры $G$.

Мы знаем наверняка, что точка выбирается из фигуры $F$. Поэтому событие «точка принадлежит фигуре $F$» является достоверным и его вероятность равна единице: $\mathrm{P}(F) = 1$.

При таком подходе мы, по сути дела, отождествляем (не различаем) случайные события и геометрические фигуры, поэтому событие и соответствующую ему фигуру мы будем называть одинаково. Подведём итог.

**Правило вычисления геометрической вероятности.** Пусть из фигуры $F$ производится случайный выбор точки. Вероятность события $G$ «выбранная точка принадлежит фигуре $G$, которая содержится в фигуре $F$», равна

$$\mathrm{P}(G) = \frac{S_G}{S_F},$$

где $S_F$ и $S_G$ — площади фигур $F$ и $G$ соответственно (площадь фигуры $F$ должна быть больше нуля).

Вернёмся к примеру 1. Фигура $F$ — прямоугольник со сторонами 3 и 4 (см. рис. 54). Следовательно, $S_F = 3 \cdot 4 = 12$.

Квадрат $G$, расположенный слева внизу в прямоугольнике $F$, по условию имеет длину стороны 1. Поэтому $S_G = 1$.

Значит, вероятность того, что точка попала в квадрат $G$, равна

$$\mathrm{P}(G) = \frac{S_G}{S_F} = \frac{1}{12}.$$

Решая такие задачи, мы предполагаем, что «шансы любой точки одинаковы». В большинстве случайных опытов это не так, но при определённых условиях можно считать, что наше предположение недалеко от истины.

Рассмотрим, например, стрелка́, который может попасть в любое место мишени. Он стреляет не в случайное место, а целится. Значит, вероятность попасть в центральный круг мишени несколько выше, чем вероятность попасть в такой же круг где-то с краю.

Но представим себе, что мишень мала, стрелок находится далеко от неё, а случайное рассеивание пуль во время стрельбы велико (оно вызвано ветром, ошибкой прицеливания, разогревом ружейного ствола и другими факторами). При этих условиях можно считать, что вероятность попасть в какую-то часть мишени главным образом зависит только от площади этой части и очень мало — от меткости стрелка.

**ПРИМЕР 2.** Стрелок стреляет издалека по круглой мишени диаметром 5 см. Известно, что стрелок попал в мишень, которая разбита на три зоны (рис. 56). Радиус центральной круговой зоны равен 1 см, средняя и внешняя зоны — кольцевые, они имеют одинаковую ширину 2 см. Найдём вероятность того, что стрелок попал во внешнюю зону мишени.

**Решение.** Фигурой $F$ в описанном опыте является мишень площадью

$$S_F = 5^2 \cdot \pi = 25\pi \text{ см}^2.$$

Фигура $G$ — внешняя зона, т. е. кольцо, у которого радиус внешней окружности равен 5 см, а внутренней — 3 см. Площадь зоны равна разности площадей двух кругов:

$$S_G = 25\pi - 9\pi = 16\pi \ (\text{см}^2).$$

Следовательно, $\mathrm{P}(G) = \dfrac{S_G}{S_F} = \dfrac{16\pi}{25\pi} = 0{,}64.$

Иногда для поиска вероятностей не нужно знать площади фигур, достаточно уметь находить отношения их площадей.

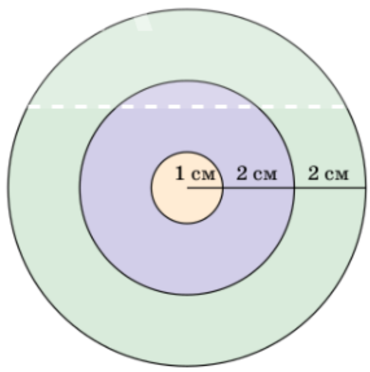



Рисунок 56

**ПРИМЕР 3.** Из треугольника $ABC$ случайным образом выбирается точка $X$. Найдём вероятность того, что она принадлежит треугольнику, вершинами которого являются середины сторон треугольника $ABC$ (рис. 57).

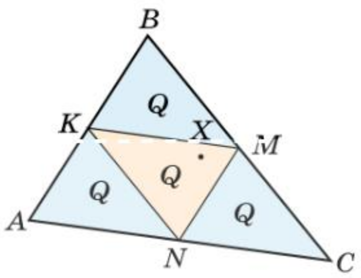


Рисунок 57

**Решение.** Средние линии разбивают треугольник $ABC$ на четыре равных малых треугольника, площадь каждого из которых обозначим $Q$ (см. рис. 57). Значит, площадь треугольника $ABC$ в 4 раза больше: $S_{ABC} = 4Q$. Интересующее нас событие состоит в том, что точка $X$ принадлежит малому треугольнику $MNK$. Вероятность этого события равна $\mathrm{P}(MNK) = \frac{S_{MNK}}{S_{ABC}} = \frac{Q}{4Q} = \frac{1}{4}$.

## Вопросы

**1** Какие события рассматриваются в опыте, состоящем в случайном выборе точки фигуры на плоскости?

**2** Точку выбирают из некоторой данной фигуры. От чего зависит и от чего не зависит вероятность попадания выбранной точки в фигуру, содержащуюся внутри данной фигуры?

**3** Напишите формулу для вероятности попадания выбранной точки в фигуру *G* при выборе точки из фигуры *F*, содержащей в себе фигуру *G*.

**4** Точку наудачу выбирают из квадрата *ABCD*. Какова вероятность того, что выбранная точка принадлежит треугольнику *ABC*?

## Задачи

**187** Внутри треугольника $ABC$ случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что эта точка попала в треугольник $ABM$, где $AM$ — медиана треугольника $ABC$.

**188** Из прямоугольника случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность события:

а) «точка принадлежит ромбу, вершинами которого служат середины сторон прямоугольника»;

б) «точка принадлежит треугольнику, вершинами которого служат две соседние вершины прямоугольника и точка пересечения его диагоналей».

**189** В квадрате случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что точка принадлежит вписанному в этот квадрат кругу.

**190** В квадрате $ABCD$ случайным образом выбирается точка $X$. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит треугольнику $ADM$, где точка $M$:

а) середина стороны $CD$;

б) делит отрезок $CD$ в отношении $1:2$, считая от точки $C$;

в) делит отрезок $CD$ в отношении $m:n$, считая от точки $C$.

**191** В квадрате $ABCD$ случайным образом выбирается точка $X$. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит трапеции $AMCD$, где точка $M$:

а) середина стороны $BC$;

б) делит отрезок $BC$ в отношении $1:2$, считая от точки $C$;

в) делит отрезок $BC$ в отношении $m:n$, считая от точки $B$.

**192** В круге случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что эта точка принадлежит:

а) вписанному в круг квадрату;

б) вписанному в круг равностороннему треугольнику.

**193** В прямоугольнике со сторонами 6 см и 20 см нарисованы два непересекающихся круга диаметром 3 см каждый. Найдите вероятность того, что случайно выбранная точка этого прямоугольника:

а) не принадлежит ни одному из этих кругов;

б) не принадлежит хотя бы одному из этих кругов.

**194** Буратино посадил в центре квадратного листа бумаги со стороной 22 см круглую кляксу радиусом 1 см. Сразу после этого Буратино посадил ещё одну такую же кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы не соприкасаются.

**195** Монету диаметром 2 см наудачу бросают на шахматную доску со стороной клетки 3 см. Какова вероятность того, что упавшая монета целиком поместилась в одной клетке?

# 63 Выбор точки из отрезка и дуги окружности

## Выбор точки из отрезка

Случайную точку можно выбирать не из фигуры на плоскости, а из отрезка. Важный пример такого эксперимента — срок службы нового прибора (скажем, мобильного телефона) до первой поломки. Новые телефоны ломаются реже, чем старые, поэтому поломка в течение первого года службы менее вероятна, чем в течение второго или третьего. Но если ограничиться небольшим периодом времени, то можно считать, что телефон может выйти из строя в любой момент этого периода «с равными шансами».

Рассмотрим опыт, который состоит в случайном выборе одной точки $X$ из отрезка $MN$. Элементарными событиями служат все точки отрезка.

Пусть отрезок $CD$ содержится в отрезке $MN$. Нас интересует событие «точка $X$ принадлежит отрезку $CD$» (рис. 58). Это событие удобно обозначить так же, как отрезок: событие $CD$.

Рисунок 58

Применим тот же метод вычисления вероятности события $CD$, какой мы использовали для фигур на плоскости: будем полагать, что вероятность пропорциональна длине отрезка $CD$. Тогда вероятность события $CD$ «точка $X$ принадлежит отрезку $CD$, содержащемуся в отрезке $MN$» равна

$$\mathrm{P}(CD) = \frac{CD}{MN}.$$

Это число неотрицательное и не превосходит 1, как и полагается вероятности случайного события.

**ПРИМЕР 1.** Внутри отрезка $MN$ случайным образом выбирается точка $X$. Найдём вероятность того, что точка $X$ ближе к $N$, чем к $M$.

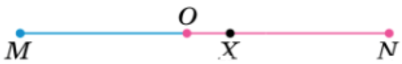



Рисунок 59

**Решение.** Пусть $O$ — середина отрезка $MN$ (рис. 59). Указанное событие наступит только тогда, когда точка $X$ лежит внутри отрезка $ON$. Тогда его вероятность равна $\mathrm{P}(ON) = \frac{ON}{MN} = 0{,}5$.

## Выбор точки из дуги

Ничего не меняется, если точка $X$ выбирается не из отрезка, а из дуги некоторой кривой линии. Например, можно случайным образом выбирать точку на окружности.

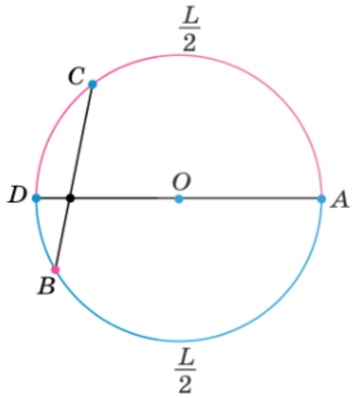



Рисунок 60

**ПРИМЕР 2.** На окружности даны точки $A$ и $B$, причём эти точки не являются диаметрально противоположными. На этой же окружности случайным образом выбирается точка $C$. Найдём вероятность того, что отрезок $BC$ пересекает диаметр окружности, проходящий через точку $A$.

**Решение.** Пусть длина окружности равна $L$. Интересующее нас событие $E$ «отрезок $BC$ пересекает диаметр $DA$» наступает, только если точки $B$ и $C$ лежат на полуокружности $DA$, то есть на равных полуокружностях (или хотя бы одна из точек совпадает с концом диаметра) (рис. 60). Длина полуокружности равна $\frac{L}{2}$.

Найдём вероятность события $E$: $P(E) = \frac{L}{2} : L = \frac{1}{2}$.

## Выбор точки из числового промежутка

Геометрическую вероятность можно применять к числовым промежуткам. Предположим, что случайным образом выбирается число $x$, удовлетворяющее условию $m \leqslant x \leqslant n$. Этот опыт можно заменить опытом, в котором из отрезка $[m;\ n]$ на числовой прямой выбирается точка с координатой $x$ (рис. 61).


Рисунок 61

Рассмотрим событие, состоящее в том, что точка с координатой $x$ выбрана из отрезка $[a;\ b]$, содержащегося в отрезке $[m;\ n]$. Это событие обозначим $a \leqslant x \leqslant b$. Его вероятность равна отношению длин отрезков $[a;\ b]$ и $[m;\ n]$: $\mathrm{P}(a \leqslant x \leqslant b) = \frac{b-a}{n-m}$.

Поясним сказанное на примере.

**ПРИМЕР 3.** Найдём вероятность того, что точка, случайно выбранная из отрезка $[0;\ 1]$, принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right]$.

**Решение.** По формуле геометрической вероятности находим:

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-0} = \frac{1}{6}.$$

## Вопросы

1 Сколько элементарных событий возникает при выборе случайной точки из фигуры на плоскости или из отрезка?

2 Как найти вероятность события «точка, случайно выбранная из отрезка $MN$, принадлежит отрезку $CD$, который содержится в отрезке $MN$»?

## Задачи

**196** Отрезок $AB$ разбит точками $C$ и $D$ на три равные части $AC$, $CD$ и $DB$. Из отрезка $AB$ выбирают случайную точку $X$. Найдите вероятность того, что точка $X$:

а) принадлежит отрезку $CD$;

б) не принадлежит отрезку $CD$.

**197** Длина отрезка $MN$ равна 3 см. Из этого отрезка наудачу выбирают одну точку. Найдите вероятность того, что эта точка удалена от точки $M$:

а) менее чем на 1 см;

б) не более чем на 2 см.

**198** Углы $AOB$ и $COD$ вертикальные. При этом точка $C$ лежит на луче $AO$ и $\angle AOB = 60°$. Из окружности с центром в точке $O$ случайным образом выбирают точку $X$. Найдите вероятность того, что точка $X$ лежит:

а) внутри хотя бы одного из углов $BOC$ или $AOD$;

б) внутри угла $DOC$.

**199** На окружности с центром $O$ выбрана точка $A$. Из этой окружности выбирают случайную точку $X$. Найдите вероятность того, что угол $AOX$:

а) меньше $90°$;

б) больше $120°$;

в) находится в пределах от $30°$ до $60°$.

**200** В окружность вписан равносторонний треугольник $ABC$. На этой окружности случайным образом выбирают две точки — $D$ и $E$. Найдите вероятность того, что отрезок $DE$:

а) не пересекает ни одну из сторон треугольника;

б) пересекает ровно две стороны треугольника.

**201** Вернувшись из отпуска, Иван Иванович обнаружил, что настенные часы давно остановились. Найдите вероятность того, что время, которое показывают остановившиеся часы, отличается от действительного времени не больше чем на 30 минут.

**202** Из отрезка $[0; 1]$ случайным образом выбирается число $x$. Найдите вероятность того, что:

а) $x < 0{,}5$; в) $x \leqslant 0{,}3$;

б) $x > 0{,}7$; г) $x \geqslant 0{,}9$.

**203** Из отрезка $[0; 1]$ случайным образом выбирается число $x$. Найдите вероятность того, что:

а) $2x < 0{,}5$;

б) $2x - 1 \leqslant 0{,}4$;

в) $0{,}4 \leqslant 2x \leqslant 0{,}6$;

г) $3x \leqslant 0{,}3$ или $3x \geqslant 0{,}9$.

**204** Иван Иванович обещал позвонить Ивану Никифоровичу между 15:00 и 16:00. Известно, что Иван Иванович всегда держит своё слово. Иван Никифорович ждал звонка, но около половины четвёртого отлучился на 10 минут, забыв взять с собой телефон. Найдите вероятность того, что, когда Иван Иванович позвонил, Иван Никифорович был у телефона.

**205** Из отрезка [0; 1] случайным образом независимо друг от друга выбираются два числа $x$ и $y$. Найдите вероятность того, что:

а) $x < \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$;
в) $0,2 < x < 0,8$, $0,3 < y < 0,5$;
б) $x > 0,7$, $y < 0,4$;
г) $x < 1$, $y > 0,4$.

**206** В самом начале поэмы Н. В. Гоголя «Мёртвые души» два мужика спорят относительно того, как далеко доедет колесо в экипаже Чичикова:

*«...Два русских мужика, стоявшие у дверей кабака против гостиницы, сделали кое-какие замечания, относившиеся впрочем более к экипажу, чем к сидевшему в нём. «Вишь ты», сказал один другому: «вон какое колесо! Что ты думаешь, доедет то колесо, если б случилось, в Москву, или не доедет?» — «Доедет», — отвечал другой. «А в Казань-то, я думаю, не доедет?» — «В Казань не доедет», — отвечал другой».*

Предположим, что путь от упомянутой гостиницы в Казань ведёт через Москву и что до Москвы 140 вёрст, а от Москвы до Казани ещё 760 вёрст. Будем считать, что колесо обязательно сломается, причём это может случиться в любой момент на пути от гостиницы до Казани. Найдите вероятность того, что:

а) колесо доедет до Москвы, как и предполагают мужики;

б) колесо не доедет даже до Москвы.

**207** Из отрезка [0; 1] случайным образом выбирается число $x$. Найдите вероятность того, что:

а) $x^2 < 0,25$;
б) $x^2 \geqslant 0,09$.

**208** Из отрезка [2; 5] случайным образом выбирается отрезок [$a$; $b$] длины 1. Найдите вероятность события:

а) $a < 3$;

б) $b < 4$;

в) «середина отрезка [$a$; $b$] заключена между числами 3 и 4»;

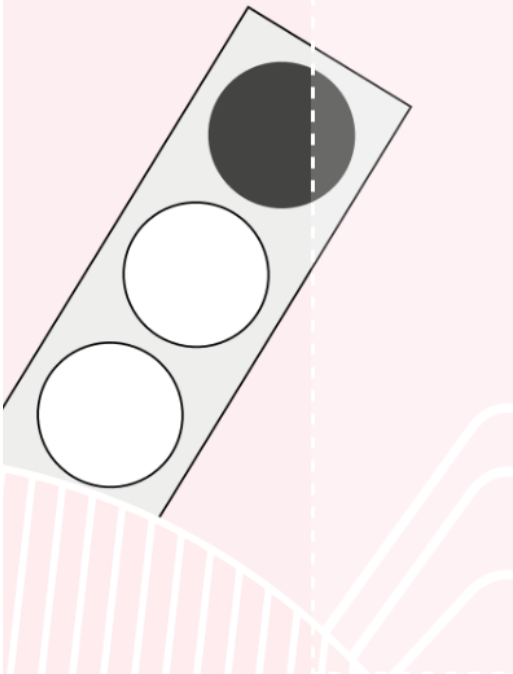
г) «середина отрезка [$a$; $b$] заключена между числами 2,5 и 4,5».

# XVI Испытания Бернулли

Испытание Бернулли, или просто испытание, — это простой случайный опыт, в котором всего два возможных элементарных события: успех и неудача. Пример испытания — бросание монеты. Из таких простых опытов можно составлять гораздо более сложные. В этой главе мы рассказываем о важных случайных опытах:

— испытания до наступления первого успеха;
— серия, состоящая из заданного количества испытаний.

Помимо этого, мы рассмотрим случайный выбор из конечного множества.



# 64 Успех и неудача. Испытания до первого успеха

## Успех и неудача

**Испытанием Бернулли**[1] или просто испытанием называют случайный опыт, который может закончиться одним из двух элементарных событий.

Например, подброшенная монета падает либо орлом, либо решкой вверх. Стрелок может попасть в мишень, а может промахнуться. Избиратель может проголосовать или не проголосовать за некоторого кандидата. В жизни мы постоянно встречаемся с такими опытами.

Одно из двух элементарных событий в таком опыте называют **успехом**, а другое — **неудачей**. Эти названия условны, их можно поменять местами. Например, для футболиста победа — успех, а для игрока проигравшей команды это же событие — неудача.

Вероятность того, что испытание Бернулли закончится успехом, обычно обозначают буквой $p$, а вероятность неудачи — буквой $q$. Числа $p$ и $q$ в сумме дают единицу, поэтому $q = 1 - p$. Чтобы в испытании было действительно два возможных события, будем считать, что $0 < p < 1$ и $0 < q < 1$.

Случайные опыты, в которых много элементарных событий, часто можно свести к изучению испытаний Бернулли. Пусть, например, на молочном комбинате в бутылки наливают по 1 л молока. Мы знаем, что при массовом производстве всегда происходят отклонения в ту или иную сторону от номинальной массы, размера или объёма. Выберем случайную бутылку для контроля. Будем считать успехом событие «объём молока в бутылке отличается от 1 л не больше чем на 5 мл». Противоположное событие можно считать неудачей. Возникает испытание Бернулли.

## Испытания до первого успеха

Рассмотрим опыт, в котором одинаковые испытания проводятся до наступления первого успеха. Как только успех случился, испытания прекращаются.

**ПРИМЕР 1.** Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл.

**ПРИМЕР 2.** Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не собьёт её.

**ПРИМЕР 3.** Мобильный телефон в условиях слабой связи пытается отправить СМС. Если попытка неудачная, телефон предпринимает следующую. Так продолжается до тех пор, пока очередная попытка не окажется удачной, либо пока не кончится время, отведённое на попытки.

**ПРИМЕР 4.** Фрагмент файла загружается из Интернета в компьютер. Загрузка идёт до тех пор, пока не пройдёт без ошибок.

**ПРИМЕР 5.** Самолёт осматривают перед каждым рейсом и допускают к полёту, пока не обнаружено отклонение от нормы в работе жизненно важных систем.

Мы будем предполагать, что в каждом испытании вероятность успеха неизменно равна $p$ и что все испытания независимы. Исследуем такой случайный опыт.

[1] Название дано в честь Якоба Бернулли, который триста лет назад изучал серии испытаний. Эти простейшие случайные опыты оказались очень важными для науки.

Обозначим неудачу буквой Н, а успех — буквой У. Тогда элементарными событиями являются последовательности

У, НУ, ННУ, НННУ, ННННУ и т. д.

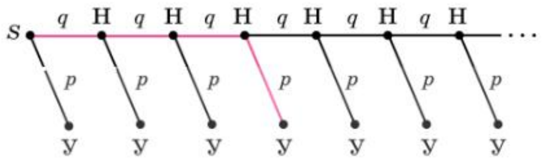


Рисунок 62

Будем считать, что испытки могут продолжаться сколь угодно долго. Значит, теоретически в этом опыте бесконечно много элементарных событий. Несложно нарисовать начальный фрагмент дерева такого опыта (рис. 62).

Элементарные события изображаются цепочками, ведущими из точки $S$ к конечным вершинам. Например, элементарное событие НННУ (три неудачи и затем успех) изображается в этом дереве цепочкой $S$НННУ (выделена красным цветом).

Пользуясь правилом умножения, несложно найти вероятность каждого элементарного события:

$$\mathrm{P}(\text{У}) = p,\ \mathrm{P}(\text{НУ}) = qp,\ \mathrm{P}(\text{ННУ}) = qqp = q^2p,\ \mathrm{P}(\text{НННУ}) = q^3p$$

и т. д. Получается общая формула: вероятность элементарного события $\underbrace{\text{ННН...Н}}_{k\text{ неудач}}\text{У}$, в котором перед успехом случилось ровно $k$ неудач, равна $\mathrm{P}\left(\underbrace{\text{ННН...Н}}_{k\text{ неудач}}\text{У}\right) = q^k p.$

Есть ещё одно элементарное событие, которое изображается бесконечной цепью неудач $S$НННН... . Какова вероятность этого элементарного события? Не может ли случиться так, что успех никогда не наступит? Сложим вероятности известных нам элементарных событий: $p + qp + q^2p + q^3p + ... + q^{k-1}p + ...$ .

Получилась сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q$. При этом $0 < q < 1$, поэтому сумма существует, и из курса алгебры известно, как её найти: $p + qp + q^2p + q^3p + ... + q^{k-1}p + ... = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1.$

Вероятности элементарных событий, оканчивающихся успехом, в сумме дают единицу. Следовательно, на долю события «бесконечная цепочка неудач» приходится вероятность 0. Такое событие не произойдёт. Рано или поздно наступит успех, как бы ни была мала его вероятность $p$ (мы договорились, что $p > 0$).

**ПРИМЕР 6.** Стрелок стреляет по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0{,}2$. Какова вероятность того, что стрелку потребуется:

а) ровно два выстрела; б) не больше пяти выстрелов?

**Решение.** а) Вероятность события НУ — сначала промах, а затем попадание — равна $qp = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$.

б) *1-й способ.* Событию $A$ «не больше пяти выстрелов» благоприятствуют элементарные события У, НУ, ННУ, НННУ и ННННУ. Сложим их вероятности с помощью формулы геометрической прогрессии:

$$\mathrm{P}(A) = p + qp + q^2p + q^3p + q^4p = p\frac{1-q^5}{1-q} = p\frac{1-q^5}{p} = 1 - q^5.$$

*2-й способ.* Рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$ «потребуется больше пяти выстрелов». Оно наступает, только если пять первых выстрелов неудачны. Вероятность этого $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = q^5$. Следовательно, $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - q^5$.

Подставляя $q = 0{,}8$, получаем $\mathrm{P}(A) = 1 - 0{,}8^5 \approx 0{,}672$.

## Вопросы

1 Что такое испытание Бернулли? Приведите примеры испытаний, помимо тех, что даны в учебнике.

2 Чему равна сумма вероятностей успеха и неудачи?

3 Сколько элементарных событий в опыте «испытания до первого успеха»?

4 Запишите формулой вероятность события «произошло восемь неудач, а при девятой попытке случился успех».

## Задачи

**209** Обычную симметричную монету бросают до выпадения первого орла. При первых пяти бросках выпала решка. Какое или какие из следующих утверждений верны?

1) Слишком много решек подряд быть не может, поэтому более вероятно, что в шестой раз выпадет орёл.
2) По какой-то причине в этом опыте решки имеют преимущество перед орлами. Более вероятно, что в следующий раз тоже выпадет решка.
3) При шестом броске орёл и решка имеют равные шансы, так же как они имели равные шансы при каждом из предыдущих бросков.
4) Более вероятно, что орёл случится при шестом броске, чем при седьмом.

**210** Проведите эксперимент. Возьмите обычную монету и бросайте (лучше трясти её в пластиковом стаканчике и выбрасывать на ладонь) до тех пор, пока не выпадет орёл. Сколько бросков для этого потребовалось?

Проведите эксперимент 4—5 раз и запишите, сколько бросков вам пришлось делать каждый раз. Пусть это сделает каждый ученик в вашем классе. Соберите результаты в таблицу (мы для иллюстрации провели 50 таких экспериментов).

Таблица 4. **Бросания монеты до первого орла**

| Номер броска, при котором выпал первый орёл | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Всего |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Число экспериментов | 26 | 14 | 6 | 1 | 2 | 0 | 1 | 50 |

а) Что является элементарным событием в таком эксперименте?
б) Сколько элементарных событий в этом эксперименте?
в) Что происходит чаще — орёл выпадает с первой попытки или со второй?
г) Что происходит чаще — орёл выпадает со второй попытки или с третьей?

**211** Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Постройте дерево эксперимента. Укажите в дереве событие $A$ и найдите его вероятность, если событие $A$ состоит в том, что:

а) потребуется ровно два броска;
б) три раза выпадет решка, на четвёртый раз — орёл;
в) потребуется три или четыре броска, чтобы орёл появился в первый раз;
г) первые четыре броска окончатся решкой.

**212** Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Найдите вероятность того, что к моменту выпадения орла будет сделано:

а) ровно 4 броска;
б) 2 или 3 броска;
в) больше 2 бросков;
г) не больше 3 бросков.

**213** В испытании Бернулли известна вероятность успеха $p$. Найдите вероятность неудачи $q$, если вероятность успеха $p$ равна:

а) $\frac{1}{4}$; б) 0,02; в) $\frac{2}{7}$; г) 0,83.

**214** Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Найдите вероятность того, что будет сделано:

а) ровно 2 броска; в) ровно 6 бросков;

б) ровно 3 броска; г) не более 4 бросков.

**215** Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0,6$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется:

а) ровно 5 попыток; б) от 2 до 4 попыток.

**216** Производятся последовательные одинаковые и независимые испытания до тех пор, пока не наступит успех. В каждом отдельном испытании вероятность успеха равна $p$, а вероятность неудачи равна $q = 1 - p$. Найдите вероятность события (выразите её через $p$ и $q$), заключающегося в том, что:

а) «успех случится при втором испытании»;

б) «успех случится позже четвёртого испытания»;

в) «успех случится не позже шестого испытания»;

г) «для достижения успеха потребуется от трёх до пяти испытаний».

**217** Сергей отправляет СМС-сообщение другу. Связь неустойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,3. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлено:

а) со второй попытки; б) не позже, чем при шестой попытке.

**218** Вероятность того, что новый мобильный телефон выйдет из строя в течение первого года работы, равна 0,2. Если телефон проработал какое-то время, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же (в телефоне нет изнашивающихся деталей, поэтому вероятность его поломки не растёт со временем). Найдите вероятность того, что новый телефон выйдет из строя:

а) на четвёртый год службы;

б) не позже чем через три года после покупки.

**219** Вероятность того, что новый планшет выйдет из строя в течение года после покупки, равна 0,1. Если планшет проработал несколько лет, то вероятность его поломки в течение следующего года такая же. Найдите вероятность того, что новый планшет выйдет из строя:

а) на третий год службы; б) прослужит больше 3, но не больше 5 лет.

**220** Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не собьёт её. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0,4$. Сколько патронов должен иметь стрелок перед началом стрельбы, чтобы поразить мишень с вероятностью не менее 0,9?

**221** Инженеры проектируют систему автоматической передачи информации от автомобиля в кризисный центр в случае аварии. Возможны помехи разного рода, поэтому система должна уметь делать несколько попыток, чтобы достичь успеха. Число попыток нужно ограничить, чтобы система не зависла. По техническому заданию вероятность передачи информации должна быть не ниже 0,95, если вероятность успеха в каждой отдельной попытке 0,2. Каким числом ограничить разрешённое количество попыток?

# 65* Серия испытаний Бернулли

В предыдущем параграфе мы рассматривали опыт, в котором испытания проводились до первого успеха. Рассмотрим другой случайный опыт. Будем проводить испытания заданное количество раз, независимо от того, успехом или неудачей окончилось предыдущее. Важно, чтобы одинаковые испытания можно было проводить много раз и чтобы они были независимыми — исход каждого не должен быть связан с предыдущими.

Краш-тест автомобиля

Такую серию испытаний можно устроить далеко не всегда. Бывают испытания, которые не удаётся повторить. Вот пример. Новую модель автомобиля подвергают испытанию на безопасность при столкновении — краш-тест. Если манекен, сидящий внутри автомобиля, не получил серьёзных повреждений, тест считают успешным.

Однако надёжность выводов при краш-тесте не очень высокая, поскольку автомобиль разбивается. Повторить испытание много раз в тех же условиях невозможно. Можно, конечно, использовать другие такие же автомобили, но это слишком дорого — делать множество автомобилей только для того, чтобы их разбить.

Поэтому для производителей автомобилей, самолётов, железнодорожной техники очень важно собирать информацию об отказах и авариях, произошедших уже в процессе эксплуатации.

Если всё же удаётся провести несколько (определённое количество) одинаковых и независимых испытаний подряд, то говорят, что проведена **серия испытаний Бернулли**.

**Серия испытаний Бернулли** — это последовательность одинаковых независимых испытаний, каждое из которых может окончиться либо успехом, либо неудачей.

Рассмотрим элементарные события в последовательности из трёх испытаний. Каждое испытание оканчивается либо успехом (У), либо неудачей (Н). После трёх испытаний мы можем получить одно из восьми элементарных событий:

УУУ УУН УНУ УНН НУУ ННУ НУН ННН.

Отдельные испытания Бернулли независимы, поэтому вероятность каждого элементарного события можно найти с помощью правила умножения вероятностей. Например, элементарное событие УУН имеет вероятность

$$ppq = p^2q.$$

Занесём результаты вычислений в таблицу 5.

Таким же способом можно составить таблицу элементарных событий и их вероятностей для серии из четырёх, пяти и более испытаний Бернулли.

Таблица 5. **Элементарные события в серии из трёх испытаний**

| Элементарное событие | УУУ | УУН | УНУ | УНН | НУУ | ННУ | НУН | ННН |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Вероятность** | $p^3$ | $p^2q$ | $p^2q$ | $pq^2$ | $p^2q$ | $pq^2$ | $pq^2$ | $q^3$ |

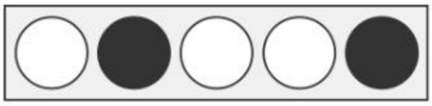
Для трёх испытаний мы получили $8 = 2^3$ элементарных событий, для четырёх испытаний их будет уже $16 = 2^4$, для пяти испытаний их будет $32 = 2^5$ и т. д., для $n$ испытаний мы получим $2^n$ элементарных событий.

Элементарным событием в серии испытаний Бернулли является не отдельный успех или неудача, а последовательность успехов и неудач. В серии из $n$ испытаний Бернулли всего $2^n$ различных элементарных событий.

**ПРИМЕР 1.** Простейшая серия испытаний Бернулли — бросание симметричной монеты. В этом опыте вероятности успеха (орла) и неудачи (решки) одинаковы и равны 0,5. Поэтому вероятности всех элементарных событий одинаковы. Если монету бросают дважды, то вероятности всех событий ОО, ОР, РО и РР равны 0,25. Если монету бросают 10 раз, то всего 1024 элементарных события, и вероятность каждого равна $\frac{1}{1024}$.

Опыт с многократным бросанием монеты интересен, и мы к нему вернёмся. Но намного интереснее изучать серии испытаний, где вероятности успеха и неудачи не одинаковы.

**ПРИМЕР 2.** Биатлонист делает по очереди 5 выстрелов по пяти мишеням. Известно, что он попадает в мишень в среднем 8 раз из 10. Какова вероятность того, что будут поражены первая, третья и четвёртая мишени, а вторая и пятая нет (рис. 63)?



В биатлоне мишени чёрные. Поражённые мишени закрываются белыми щитками.

Рисунок 63

Такое событие в наших обозначениях имеет вид УНУУН. И вероятность его равна $pqppq = p^3q^2$. Из условия следует, что $p = 0,8$, а $q = 0,2$. Подставляя эти значения, получаем

$$p^3q^2 = 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,512 \cdot 0,04 = 0,02048 \approx 0,02.$$

Рассуждая таким же образом в общем случае, мы приходим к общему факту.

В серии из $n$ испытаний Бернулли вероятность элементарного события, в котором произвольным образом чередуются $k$ успехов и $n - k$ неудач, равна $p^kq^{n-k}$.

## Вопросы

1. Какими должны быть испытания, чтобы получилась серия испытаний Бернулли?
2. Сколько возможных элементарных событий у одного испытания Бернулли? Как они называются?
3. Пользуясь обозначениями У и Н, выпишите все элементарные события, которые могут наступить в серии из двух и из трёх испытаний Бернулли.
4. Каким соотношением связаны вероятности успеха и неудачи?
5. Что является элементарным событием в серии из пяти испытаний Бернулли?

## Задачи

**222** Эксперимент состоит из четырёх последовательных испытаний Бернулли. Пользуясь обозначениями У для успеха и Н для неудачи, выпишите все элементарные события, в которых ровно:

а) 1 успех; б) 2 успеха; в) 3 успеха.

**223** Пользуясь результатами задачи 222, перечертите в тетрадь и заполните таблицу 6, в которой указано, сколько может быть элементарных событий без успехов, с одним успехом, с двумя успехами и т. д. в серии из четырёх испытаний Бернулли.

Таблица 6. **Элементарные события в серии из четырёх испытаний**

| **Число успехов** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Число благоприятствующих элементарных событий** | | | | | |

**224** Эксперимент состоит из пяти последовательных испытаний Бернулли. Пользуясь обозначениями У и Н для успеха и неудачи, выпишите все элементарные события, в которых ровно:

а) 0 успехов; б) 1 успех; в) 2 успеха.

**225** Игральную кость бросают 4 раза. Найдите вероятность события, состоящего в том, что шестёрка выпадет:

а) только при первом и третьем бросках;

б) только при втором броске;

в) ровно 3 раза — при первом, втором и четвёртом бросках.

**226** Миша кидает мяч в баскетбольное кольцо. Вероятность попадания равна $p = \frac{1}{3}$. Найдите вероятность того, что, сделав 5 бросков, Миша попадёт в кольцо только при втором и четвёртом бросках.

# 66* Число успехов в испытаниях Бернулли

В предыдущем параграфе мы описали серии испытаний Бернулли и научились вычислять вероятности элементарных событий. Поставим другую задачу. Сколько элементарных событий в серии из $n$ испытаний Бернулли благоприятствуют наступлению определённого числа успехов? Например, пусть проводится 5 испытаний. Сколько элементарных событий этой серии благоприятствуют событию «случится ровно 3 успеха»?

Снова применим обозначения У и Н для успеха и неудачи. Элементарные события серии из 5 испытаний с 3 успехами могут выглядеть следующим образом:

УУУНН УУНУН УУННУ и т. д.

Таким образом, элементарных событий с 3 успехами в 5 испытаниях ровно столько, сколько существует способов расставить 3 буквы У в последовательности из 5 букв. Это, как известно, число сочетаний $C_5^3$, то есть 10.

Обобщим этот результат на произвольное число испытаний $n$.

Число элементарных событий, благоприятствующих $k$ успехам в серии из $n$ испытаний, равно $C_n^k$.

**ПРИМЕР 1.** Чтобы быстрее считать мелочь и давать сдачу, кассир в метро заранее складывает монеты столбиками по 10 монет в каждом. При этом кассир кладёт монеты случайной стороной вверх. Сколько всего есть способов положить 10 монет в столбик так, чтобы ровно 4 из них лежали орлом вверх?

**Решение.** Главное — увидеть в задаче знакомый случайный опыт. Положение каждой монеты внутри столбика можно считать испытанием Бернулли с успехом «монета орлом вверх». Выкладывание столбика — серия из $n = 10$ испытаний. Число требуемых успехов $k = 4$.

Следовательно, задачу можно переформулировать так: сколько элементарных событий благоприятствует наступлению 4 успехов в 10 независимых испытаниях Бернулли? Это число равно $C_{10}^4 = 210$ (см. рис. 51 на с. 56).

**ПРИМЕР 2.** На борту самолёта 100 пассажиров. Им предлагается ужин — курица с рисом или рыба с картофельным пюре. Каждый пассажир делает свой выбор. Сколько в этом опыте комбинаций, в которых ровно 67 пассажиров выбирают курицу?

**Решение.** Задача укладывается в схему испытаний Бернулли. Одно испытание заключается в выборе, который делает очередной пассажир. Успехом назовём выбор курицы, неудачей — выбор рыбы. Число испытаний $n = 100$. Число требуемых успехов $k = 67$.

**Ответ:** $C_{100}^{67}$. Число это огромно, но мы всё же запишем его:

$$C_{100}^{67} = 294\,692\,427\,022\,541\,000\,000\,000\,000.$$

## Вопросы

1 Сколько различных элементарных событий благоприятствует 5 успехам в серии из 7 испытаний Бернулли? Для ответа можно воспользоваться треугольником Паскаля (см. рис. 51).

2 Сколько в серии из $n$ испытаний Бернулли элементарных событий, содержащих ровно $k$ успехов?

## Задачи

**227** Выпишите все элементарные события, благоприятствующие:

а) 2 успехам в серии из 4 испытаний Бернулли;

б) 5 успехам в серии из 6 испытаний Бернулли.

**228** Сколько элементарных событий в серии из 8 испытаний Бернулли благоприятствует:

а) 2 успехам; б) 6 успехам; в) 5 успехам; г) 3 успехам?

**229** Сколько элементарных событий благоприятствует появлению трёх орлов, если монету бросают:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 7 раз; г) $n$ раз?

**230** Проводится серия из 10 испытаний Бернулли. Каких элементарных событий больше: тех, в которых 3 успеха, или тех, в которых 7 успехов?

**231** Проведена серия из $n$ испытаний Бернулли. Найдите $n$, если общее число элементарных событий равно:

а) 16; б) 64; в) 256; г) 2048; д) $2^m$.

**232** Докажите, что в серии из 15 испытаний Бернулли число элементарных событий, благоприятствующих 6 успехам, равно числу элементарных событий, благоприятствующих:

а) 9 неудачам; б) 9 успехам; в) 6 неудачам.

**233** Проводится серия из $n$ испытаний Бернулли, $n \geqslant 9$. Выразите формулой число элементарных событий, которые благоприятствуют появлению:

а) 2 или 3 успехов; в) ровно 4, 6 или 9 успехов;

б) не более 5 успехов; г) менее 4 неудач.

**234** Найдите число элементарных событий в серии из 134 испытаний Бернулли, которые благоприятствуют появлению:

а) 133 успехов; б) одного успеха.

# 67* Вероятности событий в испытаниях Бернулли

Мы знаем, что при проведении серии из $n$ независимых испытаний Бернулли каждое конкретное элементарное событие, в котором $k$ успехов и $n - k$ неудач имеет вероятность $p^k q^{n-k}$.

Мы также знаем, что число таких элементарных событий с $k$ успехами равно $C_n^k$. Следовательно, событие «наступило ровно $k$ успехов» имеет вероятность $C_n^k p^k q^{n-k}$. Эту формулу часто называют **формулой Бернулли.**

**Формула Бернулли.** В серии испытаний Бернулли вероятность события «ровно $k$ успехов» равна

$$C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $n$ — число испытаний, $p$ — вероятность успеха и $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

**ПРИМЕР 1.** Стрелок 7 раз стреляет по мишени с вероятностью попадания $\frac{1}{3}$ при каждом отдельном выстреле. Какова вероятность события «мишень будет поражена ровно 3 раза»?

Этот опыт — серия из 7 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = \frac{1}{3}$ и вероятностью неудачи $q = 1 - p = \frac{2}{3}$. Вероятность события $A$ «ровно 3 попадания» равна:

$$\mathrm{P}(A) = C_7^3 p^3 q^4 = 35 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0{,}256.$$

Рассмотрим теперь более сложные события, состоящие в том, что число успехов заключено в некоторых пределах.

**ПРИМЕР 2.** Бросаем игральную кость. Успехом будем считать выпадение шестёрки. Неудачей — выпадение любого другого числа очков. Таким образом, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$. Найдём вероятность того, что при 8 бросках шестёрка выпадет от 4 до 6 раз.

Чтобы решить эту задачу, нужно отдельно найти вероятности того, что шестёрка выпала 4, 5 или 6 раз, и их сложить:

$$C_8^4p^4q^4 + C_8^5p^5q^3 + C_8^6p^6q^2 = 70\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 56\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 28\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}306.$$

В некоторых задачах удобно вместо вероятности нужного события сначала найти вероятность противоположного события.

**ПРИМЕР 3.** Проводится серия из 6 испытаний Бернулли. Вероятность успеха $p$ равна 0,3. Найдём вероятность события $A$, состоящего в том, что в этой серии наступит хотя бы один успех.

**Решение.** Вместо события $A$ рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$ «наступит 0 успехов». Вероятность этого события найти несложно. Учитывая, что вероятность неудачи $q$ равна 0,7, получаем $\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = C_6^0p^0q^6 = 1\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}118$.

Следовательно, $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{A}\right) \approx 0{,}882$.

Чтобы найти вероятность по формуле Бернулли в электронной таблице, используйте функцию

БИНОМ.РАСП()

На рисунке найдена вероятность того, что в 10 испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}4$ наступит ровно 6 успехов. Обратите внимание на последний аргумент в скобках. Он равен 0. Если вместо 0 написать 1, то функция вычислит вероятность того, что успехов случилось 6 или меньше (от 0 до 6).

$fx$ =БИНОМ.РАСП(E4;E2;E3;0)

| D | E | F |
|---|---|---|
| | | |
| N | 10 | 0,111477 |
| p | 0,4 | |
| k | 6 | |

**ПРИМЕР 4.** В 2009 г. в первой части ЕГЭ по математике было 10 заданий с выбором ответа. К каждому заданию предлагалось 4 варианта ответа, но только один из них был верным. Если участник экзамена выбирал ответы случайным образом, то для него эти 10 заданий превращались в серию из 10 испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}25$. Чтобы успешно сдать экзамен, участнику нужно было указать верные ответы хотя бы к трём заданиям. Какова была вероятность при таких условиях сдать экзамен, ничего не зная и выбирая ответы наудачу?

**Решение.** Найдём вероятность события $A$ «3 успеха или больше». Вероятность противоположного события $\overline{A}$ «успехов 0, 1 или 2» равна:

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}\right) = C_{10}^0p^0q^{10} + C_{10}^1p^1q^9 + C_{10}^2p^2q^8 = 0{,}75^{10} + 10\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75^9 + 45\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^8 \approx 0{,}53.$$

Значит, $\mathrm{P}(A) \approx 0{,}47$. Следовательно, при таких условиях примерно 53% участников, не знавших абсолютно ничего, проваливались, а примерно 47% таких участников успешно сдавали экзамен. С 2010 г. в ЕГЭ по математике нет задач с выбором ответа.

## Вопросы

1 Запишите формулу вероятности события «наступило 3 успеха в серии из 8 испытаний Бернулли».

2 Запишите выражение для вероятности события «наступило 2 или 3 успеха в серии из 9 испытаний Бернулли».

3 Как найти вероятность события «хотя бы один успех» в серии испытаний Бернулли?

## Задачи

**235** В некотором испытании Бернулли успех наступает с вероятностью $p = 0{,}5$. Найдите вероятность того, что в серии из 4 таких испытаний:

а) наступит ровно 2 успеха;
б) наступит ровно 1 успех;
в) наступит ровно 3 успеха;
г) все испытания окончатся неудачей.

**236** Найдите вероятность появления ровно трёх орлов, если монету бросают:

а) 3 раза; б) 7 раз; в) 9 раз; г) $n$ раз.

**237** Игральную кость бросают 6 раз. Найдите вероятность того, что шестёрка выпадет:

а) 3 раза; б) 5 раз; в) 1 раз; г) 6 раз; д) 2 раза; е) ни разу.

**238** Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая команда первой будет владеть мячом. Найдите вероятность того, что в трёх матчах, которые команда «Стартёр» проводит с другими командами, мяч каждый раз будет доставаться именно этой команде.

**239** Случайный эксперимент заключается в пятикратном бросании симметричной монеты. Найдите вероятность события:

а) «решка выпадет ровно 3 раза»;
б) «орёл выпадет от двух до четырёх раз»;
в) «решка выпадет либо 1 раз, либо 3 раза»;
г) «орёл выпадет нечётное число раз».

**240** Стрелок три раза стреляет по мишени. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,74. Какова вероятность события:

а) «цель не будет поражена ни разу»;
б) «все три выстрела попадут в цель»?

**241** В некотором испытании Бернулли неудача наступает с вероятностью $q = \frac{1}{3}$. Найдите вероятность того, что в серии из 5 таких испытаний:

а) наступит ровно 2 успеха;
б) наступит ровно 1 успех;
в)* наступит более 2 успехов;
г)* наступит менее 4 успехов.

**242** В некотором испытании Бернулли успех наступает с вероятностью $p = 0{,}4$. Найдите вероятность того, что в серии из 4 таких испытаний:

а) наступит более 2 успехов;
б) наступит не более 2 неудач;
в) не все испытания окончатся неудачей;
г) наступит менее 4 успехов.

**243** Перед началом шахматной партии с помощью жребия игроки определяют, кто играет белыми, а кто — чёрными. Остап Бендер проводит сеанс одновременной игры с любителями шахмат города Васюки на 12 досках. Найдите вероятность того, что он будет играть белыми:

а) ровно на 3 досках;
б) ровно на 5 досках;
в) хотя бы на 1 доске;
г) по крайней мере на 2 досках.

**244** Олегу задали 10 одинаковых по трудности задач. Вероятность того, что Олег решит каждую отдельную задачу, равна 0,75. Найдите вероятность того, что Олег решит:

а) все задачи; б) не менее 8 задач; в) не менее 6 задач.

# XVII Случайные величины

Случайная величина — это величина, значение которой зависит от элементарного события, которым закончился опыт. Чтобы полностью описать случайную величину, нужно знать все её значения и их вероятности, то есть распределение вероятностей случайной величины.

Случайные величины служат для представления изменчивых величин, которые встречаются в природе и в повседневной жизни.

# 68 Примеры случайных величин

В разных школьных предметах вы изучаете различные величины — длины и расстояния, массу и температуру, скорость и время. В начальной школе рассматривали постоянные величины. Позже вы познакомились с величинами, которые зависят друг от друга или меняются со временем. Для описания таких величин используются функции.

Занимаясь статистикой, мы узнали, что большинство величин в окружающем мире подвержены случайной изменчивости: на их значения влияет множество известных или неизвестных случайных факторов. Про некоторые величины мы заранее знаем, что они случайные. Например, число успехов в серии испытаний Бернулли — заведомо случайная величина. Другие величины принято считать постоянными, но на самом деле они изменчивы — их значения во многом случайны. Важный пример — напряжение в электрической сети. В то же время, говоря в главе III о случайной изменчивости, мы отмечали, что часто изменчивость подчиняется закономерностям, проявляющимся при большом числе измерений или наблюдений. Важная задача теории вероятностей — изучение случайных величин и их числовых характеристик.

Изменчивые величины, возникающие при проведении случайного опыта, мы будем называть **случайными величинами**.

**Случайная величина** — это величина, значение которой зависит от того, каким элементарным событием закончился случайный опыт.

Чтобы не путать на письме случайные величины и переменные, будем обозначать случайные величины большими латинскими буквами. Приведём несколько примеров.

**ПРИМЕР 1.** Предположим, некто кидает игральную кость. Случайной величиной $X$ будем считать число выпавших очков. Поскольку кубик имеет 6 граней и число очков на каждой грани — целое число от 1 до 6, случайная величина $X$ принимает значения из множества $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

**ПРИМЕР 2.** Рост наудачу выбранного человека можно рассматривать как случайную величину.

**ПРИМЕР 3.** Участник лотереи покупает билет. Цена билета фиксирована, но выигрыш — случайная величина.

**ПРИМЕР 4.** Время безотказной службы телевизора или стиральной машины — случайная величина. Свойства этой случайной величины важны, например при установлении гарантийного срока на новую технику.

**ПРИМЕР 5.** Число бракованных деталей в контрольной партии — случайная величина.

**ПРИМЕР 6.** Напряжение в бытовой электрической сети — случайная величина, значения которой колеблются около 220 В.

**ПРИМЕР 7.** Масса расфасованных продуктов — случайная величина. Она может немного отличаться в ту или другую сторону от номинальной массы. Покупатель такие отличия не замечает. Зато производителю колебания в весе небезразличны. В случае серьёзного смещения среднего веса в ту или иную сторону производитель может понести убытки.

**ПРИМЕР 8.** Важным примером случайной величины является число успехов в серии испытаний Бернулли. Пусть, например, проводится 10 испытаний Бернулли. Число успехов в этой серии может принимать любое целое значение от 0 до 10. Число неудач также является случайной величиной.

**ПРИМЕР 9.** Можно точно вычислить, чему равна сумма чисел $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$. Поэтому значение этой суммы не является случайной величиной. Однако если дать эту задачу на контрольной работе в 6 классе, то полученные ответы могут отличаться от верного ответа непредсказуемым образом. Поэтому ответ школьника можно рассматривать как случайную величину.

**ПРИМЕР 10.** Монету бросают до первого выпадения орла. Число бросаний — случайная величина, значением которой может быть любое натуральное число.

Если случайная величина принимает отдельные значения, которые «не сливаются» в интервалы или отрезки, то такую случайную величину называют **дискретной.** Например, результат бросания одной игральной кости или сумма выпавших очков при двух бросаниях кости — это дискретные величины.

В природе значения многих случайных величин изменяются непрерывно. Например, температура воздуха в помещении меняется непрерывно внутри некоторого интервала. Рост случайно выбранного человека может иметь любое значение внутри некоторого промежутка. Такие случайные величины называются **непрерывными.**

## Вопросы

1. Что такое случайная величина?
2. Приведите два-три примера случайных величин, помимо тех, которые даны в тексте учебника. Вы можете легко найти примеры, вспомнив игры, в которые вы играете. Другие примеры можно найти при наблюдениях за погодой.
3. Можно ли рассматривать школьную оценку как случайную величину? Приведите аргументы за и против.
4. Приведите пример дискретной и пример непрерывной случайной величины помимо тех, что даны в тексте.

## Задачи

**245** Серия товарищеских матчей проводится до двух побед одной из команд в трёх матчах: если какая-то команда одержала две победы, то она объявляется победителем, и следующий матч уже не проводится. Можно ли считать число матчей случайной величиной? Какие значения может принимать эта случайная величина?

**246** Два шахматиста решили провести дружескую встречу до трёх побед в пяти партиях. Какие значения может принимать случайная величина «число сыгранных партий»?

**247** В моментальной лотерее участвуют три типа билетов: без выигрыша (выигрыш 0 рублей), с выигрышем 20 рублей и с выигрышем 100 рублей. Можно ли считать выигрыш играющего случайной величиной? Какие значения может принимать эта величина, если играющий покупает:

а) один билет;

б) два билета?

**248** В книжке 16 страниц. Вы наугад открываете книжку и смотрите номер страницы слева. Можно ли считать эту величину случайной? Какие значения она может принимать?

**249** Какие значения может принимать случайная величина:

а) сумма очков при бросании двух игральных костей;

б) сумма очков при бросании трёх игральных костей;

в) число испытаний в опыте, где испытания проводятся до первого успеха;

г) количество успехов в серии из $n$ испытаний Бернулли?

**250** Известно, что в классе 32 ученика. Из них 20 девочек. Какие значения может принимать случайная величина:

а) число девочек, присутствующих сегодня в классе;

б) число учеников, отсутствующих сегодня в классе?

Сколько различных значений может принять каждая из этих случайных величин?

# 69* Распределение вероятностей случайной величины

Чтобы описать случайную величину, нужно указать её возможные значения и их вероятности.

**Распределением вероятностей** или просто **распределением** случайной величины называется закон, который каждому значению случайной величины ставит в соответствие вероятность того, что величина примет это значение.

Если, например, величина $X$ может принять значение 5, то нужно указать вероятность события «$X$ равно 5». Если величина $X$ может принять значение $-4$, то нужно указать вероятность события «$X$ равно $-4$». Такие события принято обозначать $(X = 5)$, $(X = -4)$ и т. д.

Распределение вероятностей можно задать таблицей, графиком, диаграммой, формулами или даже словесным описанием.

ПРИМЕР 1. Случайная величина $Y$ равна числу очков, выпавших при однократном бросании игрального кубика. Распределение удобно задать таблицей 7.

Таблица 7. **Число выпавших очков**

| **Значение $Y$** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Вероятность** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

В этом примере вероятности всех шести значений одинаковые. Вероятность распределена поровну между шестью возможными значениями.

Найдём, чему равна вероятность события $(3 \leqslant Y \leqslant 5)$. Это событие состоит в том, что при одном броске игральной кости выпало от 3 до 5 очков. Вероятность этого равна сумме трёх вероятностей:

$$P(3 \leqslant Y \leqslant 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим случайную величину $S$ — «число выпавших орлов при пяти бросаниях монеты». Количество выпавших орлов может быть целым числом от 0 до 5. Вероятность того, что орлов случится ровно $k$, можно найти по формуле Бернулли:

$$\mathrm{P}(S = k) = C_5^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \frac{C_5^k}{32}.$$

Составим таблицу распределения.

Таблица 8. **Распределение числа орлов в серии из 5 испытаний**

| **Значение $S$** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Вероятность** | $\frac{1}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{10}{32}$ | $\frac{5}{32}$ | $\frac{1}{32}$ |

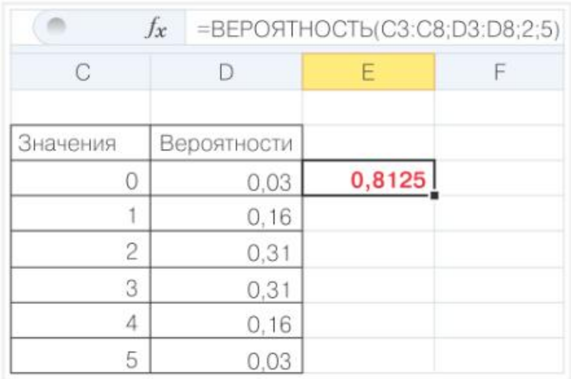
Найдём, чему равна вероятность того, что при пяти бросках монеты случится от 2 до 5 орлов. Это событие можно записать $(2 \leqslant S \leqslant 5)$, и его вероятность равна

$$\mathrm{P}(S \geqslant 2) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{13}{16}.$$

В редакторах электронных таблиц для вычислений вероятностей по распределениям предусмотрена функция

ВЕРОЯТНОСТЬ()

На рисунке показано решение примера 2.




**ПРИМЕР 3.** Количество попыток в серии испытаний до первого успеха, если вероятность успеха в каждом испытании равна $p$.

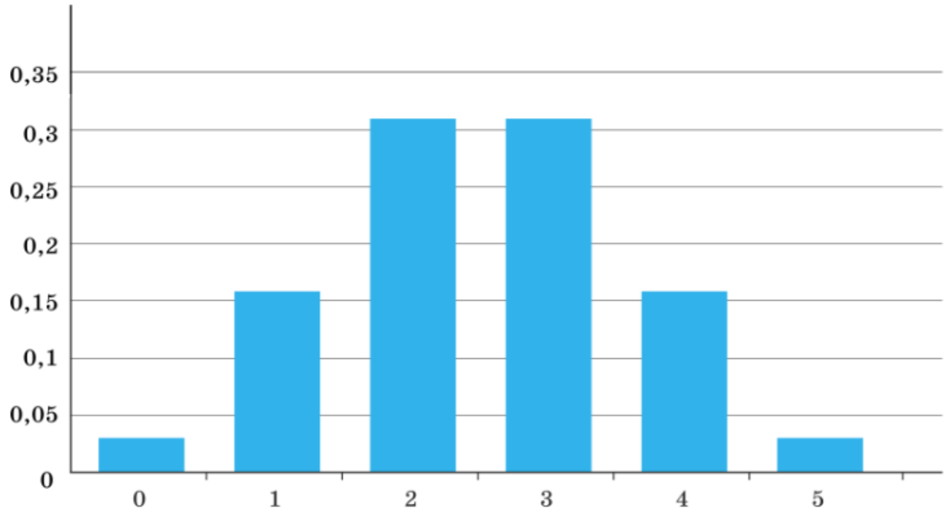
Отличие от двух предыдущих примеров в том, что у случайной величины «число попыток до достижения первого успеха» (назовём её $X$) значений бесконечно много — от 1 до бесконечности. Не будем изображать бесконечную таблицу, а зададим распределение формулой:

$$\mathrm{P}(X = k) = pq^{k-1},$$

где $q = 1 - p$ — это вероятность неудачи в каждой отдельно взятой попытке.

**ПРИМЕР 4.** Иногда распределение вероятностей случайной величины можно изобразить с помощью столбиковой диаграммы. На горизонтальной оси отмечаются значения, а высоты столбиков равны вероятностям соответствующих значений. Диаграмма 1 построена на основе значений таблицы 8.

Диаграмма 1. **Распределение вероятностей случайной величины** $S$




**Основное свойство распределения.** Сумма всех вероятностей в распределении любой дискретной случайной величины равна 1.

Объясняется это свойство тем, что сумма вероятностей всех значений случайной величины равна сумме вероятностей всех элементарных событий эксперимента.

## Вопросы

**1** Что такое распределение вероятностей случайной величины?

**2** Сформулируйте основное свойство распределения случайной величины.

**3** Всегда ли различные значения случайной величины имеют равные вероятности?

**4** Приведите пример случайной величины, все возможные значения которой имеют равные вероятности.

## Задачи

**251** Задайте с помощью таблицы распределение вероятностей случайной величины $X$, равной числу орлов, выпавших при:

а) одном;

б) двух;

в) трёх бросаниях монеты.

**252** Опыт состоит в бросании двух игральных костей. Заполните таблицу распределения вероятностей и постройте соответствующие диаграммы для случайной величины:

а) наибольшее из двух выпавших очков;

б) наименьшее из двух выпавших очков.

*Указание.* Наибольшее из данных чисел — это число, больше которого нет. Поэтому, если числа равны, то считается, что каждое из них наибольшее. Например, если оба раза выпало три очка, то считается, что наибольшее выпавшее число очков — три. То же самое с наименьшим значением.

**253** В таблицах 9 и 10 дано распределение вероятностей некоторой случайной величины. Одна из вероятностей неизвестна. Найдите её.

а) Таблица 9

| Значение | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

б) Таблица 10

| Значение | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,18 | | 0,18 | 0,15 | 0,1 | 0,05 |

**254** Распределение вероятностей случайной величины $X$ задано таблицей 11.

Таблица 11

| Значение $X$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,1 | 0,04 | 0,2 | 0,18 | 0,05 | 0,15 | 0,11 | 0,1 | 0,07 |

Найдите вероятность события:

а) $(1 < X < 2{,}5)$;

б) ($X = 0{,}5$ или $X > 2$);

в) ($X > 0{,}4$ или $X = 2{,}5$);

г) ($X$ — целое число).

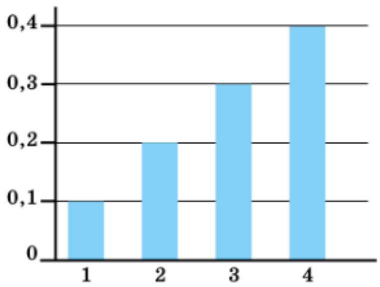
**255** По таблице распределения (табл. 12) постройте диаграмму распределения случайной величины $Z$.

Таблица 12

| Значение $Z$ | –5 | –3 | –1 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,1 | 0,15 | 0,25 | 0,25 | 0,15 | 0,1 |

**256** По диаграмме 2 постройте таблицу распределения случайной величины $T$.

Диаграмма 2



# 70* Математическое ожидание случайной величины

Рассмотрим случайную величину $X$ и её распределение, заданное таблицей 13.

Таблица 13

| **Значение** $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Вероятность** | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

Если бы у нас был числовой набор и мы знали бы частоты значений, то могли бы найти среднее значение как сумму произведений различных значений и их частот (см. ч. 1 на с. 60).

В данном случае мы имеем дело не с набором, а со случайной величиной. Вместо частот нам известны вероятности значений. Если умножить значения случайной величины на их вероятности и сложить произведения, то получится некоторое среднее значение случайной величины. Это среднее называют **математическим ожиданием**. Математическое ожидание случайной величины $X$ обозначают $\mathrm{E}X$ или $\mathrm{E}(X)$[1]. Мы будем пользоваться скобками только при необходимости.

**Математическое ожидание** случайной величины — это сумма произведений значений этой величины и их вероятностей:

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Математическое ожидание иногда называют **ожидаемым значением** или **средним значением** случайной величины. Математическое ожидание случайной величины измеряется в тех же единицах, что и сама величина (средний рост — в сантиметрах, средняя температура — в градусах).

**ПРИМЕР.** Пусть случайная величина $X$ равна числу очков, выпавших на одной игральной кости. Вероятности выпадения каждой грани одинаковы и равны $\frac{1}{6}$ (см. табл. 7 на с. 82).

Поэтому $\mathrm{E}X = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$

Чтобы найти математическое ожидание в электронной таблице, используйте функцию

СУММПРОИЗВ()

Решение задачи про лотерею (с. 87) показано на рисунке.

$f_x$ =СУММПРОИЗВ(C3:C5;D3:D5)

| C | D | E | F |
|---|---|---|---|
| | | | |
| Выигрыш | Вероятности | | |
| 0 | 0,89 | | |
| 200 | 0,1 | | |
| 2000 | 0,01 | | |
| | | | |
| Мат.ож | 40 | | |

[1] Буква Е — от английского слова *expectation* — «ожидание». Обратите внимание на то, что в обозначении математического ожидания буква Е пишется прямо, а не курсивом.

## Физический смысл математического ожидания

Смысл математического ожидания можно проиллюстрировать с помощью диаграммы распределения вероятностей случайной величины. Если представить, что диаграмма вырезана из листа картона или металла, то математическое ожидание — точка, в которую проектируется центр масс диаграммы.

На рисунке 64 показано распределение некоторой случайной величины $X$. Её математическое ожидание равно 5,09. Если «подставить» под точку с абсциссой 5,09 опору, то диаграмма будет находиться в равновесии.

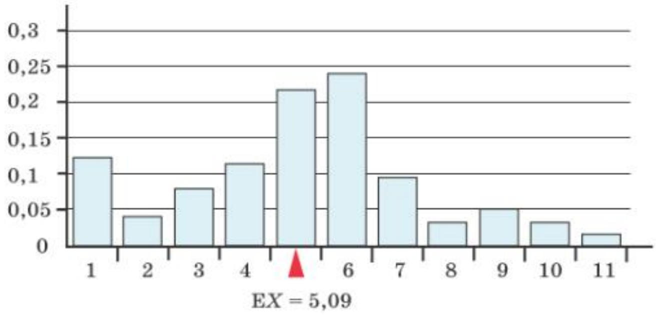



Рисунок 64. **Математическое ожидание — точка равновесия диаграммы**

Мы знаем, что таким же свойством обладает среднее арифметическое, которое служит «центром масс» числового набора (см. ч. 1 на с. 33). Эта общность свойств среднего значения и математического ожидания ещё раз подчёркивает их единую природу.

Математическое ожидание случайной величины — теоретический аналог среднего арифметического набора массива данных.

Расскажем о двух важных применениях математического ожидания.

## Лотерея

С одной стороны, лотерея должна быть привлекательной — должны быть большие выигрыши, а выигрышных билетов должно быть довольно много.

С другой — лотерея должна приносить доход организаторам лотереи, то есть суммарный выигрыш должен быть меньше общей выручки. Добиться этого наверняка невозможно, поскольку неизвестно, сколько билетов будет распродано. Значит, этого нужно добиться с большой вероятностью. Здесь на помощь приходит теория вероятностей. Она помогает установить цену билета, при которой лотерея практически наверняка принесёт прибыль.

В лотерее должны быть большие выигрыши, поэтому определим, что на 1% билетов выпадает выигрыш 2000 р. Выигрышных билетов должно быть немало. Пусть 10% билетов дают выигрыш 200 р.

Участник лотереи случайным образом выбирает один билет. Найдём математическое ожидание случайной величины $X$ «выигрыш участника». Запишем распределение в виде таблицы (табл. 14).

Таблица 14. **Распределение выигрыша в лотерее**

| **Выигрыш, р.** | 0 | 200 | 2000 |
|---|---|---|---|
| **Вероятность выигрыша** | 0,89 | 0,1 | 0,01 |

Математическое ожидание выигрыша равно

$$EX = 0 \cdot 0{,}89 + 200 \cdot 0{,}1 + 2000 \cdot 0{,}01 = 40 \text{ (р.)}.$$

Чтобы лотерея приносила доход, цена билета должна быть больше, чем средний выигрыш. Если назначить цену билета 50 р., то средний доход от продажи одного билета будет равен $50 - 40 = 10$ (р.).

Разумеется, может случиться так, что на свой билет участник лотереи получит большой выигрыш. Но если бы некто решил купить все билеты, то ему достались бы все выигрыши, но в среднем он достоверно потерял бы по 10 р. на каждый купленный билет.

Так устроены все лотереи: математическое ожидание выигрыша на один билет меньше цены билета.

Это условие является непременным, оно обеспечивает доход организаторам лотереи. Человек, который решил сыграть в лотерею, должен понимать это. Можно рассматривать лотерею как развлечение, но не как способ получить много денег. Никакие стратегии, которые якобы позволяют выиграть в лотерею, на самом деле не работают — математическое ожидание выигрыша меньше цены билета.

Чем больше математическое ожидание выигрыша, тем больше билетов требуется, чтобы устроитель лотереи получил ощутимый доход. Чем меньше математическое ожидание, тем меньше людей привлекает такая игра. Поэтому организаторы экспериментальным путём определяют наиболее выгодные условия лотереи, придумывают разнообразную рекламу и часто стараются сделать так, чтобы оценить ожидание выигрыша было невозможно. Это не значит, что в лотерею нельзя выиграть. Иногда люди выигрывают, и даже крупные суммы, но в конечном итоге основной доход всегда имеет организатор лотереи. Когда игроков много, одни выигрывают, другие нет, деньги перераспределяются между ними, и при этом значительная часть денег достаётся устроителям лотереи.

Если часть средств, вырученных от лотереи, идёт на нужды культуры, спорта, на содержание больниц и другие общественно полезные цели, то такие лотереи называются благотворительными. На любую лотерею и на любой игральный автомат требуется специальное разрешение (лицензия). Если кто-то устраивает игру на деньги или вещи без лицензии, то это нарушение закона, а сам организатор такой лотереи, скорее всего, мошенник. В такие игры играть нельзя.

## Обязательное страхование автомобильной гражданской ответственности (ОСАГО)

Полис ОСАГО должен иметь каждый владелец автомобиля. Владелец и страховая компания заключают договор страхования. Продавая автовладельцу полис, страховая компания берёт на себя обязательство возместить ущерб (в пределах определённой суммы), который этот автовладелец нанесёт окружающим в случае дорожно-транспортного происшествия, случившегося по его вине.

Страховая выплата является случайной величиной, но, чтобы определить стоимость полиса, пока ДТП не произошло, нужно знать математическое ожидание страховой выплаты на один застрахованный автомобиль.

Разумеется, часть стоимости полиса идёт в доход страховой компании, из которого выплачивается зарплата сотрудникам, оплачивается аренда и содержание офисов, налоги и все текущие расходы.

Стоимость страхового полиса складывается из математического ожидания страховой выплаты и доли, идущей в доход страховой компании.

## Вопросы

**1** Что такое математическое ожидание случайной величины?

**2** Может ли быть так, что все значения случайной величины положительны, а математическое ожидание этой величины отрицательно?

**3** Чему равно математическое ожидание числа очков, выпавших при бросании одной игральной кости?

## Задачи

**257** В таблицах 15 и 16 дано распределение вероятностей случайной величины. Найдите математическое ожидание этой величины.

а) Таблица 15

| Значение | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{1}{3}$ |

б) Таблица 16

| Значение | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,09 | 0,12 | 0,21 | 0,25 | 0,04 | 0,05 | 0,24 |

**258** Найдите $\mathrm{E}Z$, если случайная величина $Z$ с равными вероятностями принимает:
а) все целые значения от $-15$ до 15;
б) все чётные целые значения от 2 до 16.

**259** На вокзале игрок предлагает прохожим игру. Он зажимает в кулаке носовой платок так, что четыре уголка торчат наружу между пальцами. Прохожий берёт платок за два уголка и вытягивает его. Если прохожий вытягивает платок за соседние уголки, то проигрывает 50 р. Если прохожий вытягивает два противоположных уголка, то выигрывает 50 р. Составьте распределение и найдите математическое ожидание случайной величины $X$ «выигрыш прохожего».

**260** Организатор лотереи напечатал всего 10 000 лотерейных билетов. Цена каждого билета 50 р. Известно, что 1000 билетов дают выигрыш 100 р., ещё в 10 билетах — выигрыш 1000 р., а на 1 билет приходится главный выигрыш 10 000 р. Все прочие билеты без выигрыша. Найдите математическое ожидание случайной величины «выигрыш на один случайный лотерейный билет». Сравните средний выигрыш с ценой билета.

# 71* Дисперсия и стандартное отклонение

Занимаясь описательной статистикой, мы говорили, что рассеивание значений измеряют с помощью дисперсии и стандартного отклонения.

В теории вероятностей речь идёт о случайных величинах. Для описания рассеивания случайной величины используются аналогичные характеристики: **дисперсия**[1] и **стандартное отклонение случайной величины**.

[1] Использование одного и того же слова «дисперсия» для измерения рассеивания числовых массивов и случайных величин иногда создаёт неудобства. В англоязычной литературе для дисперсии случайной величины чаще используется слово *variance* (вариация, изменение).

Обозначают дисперсию случайной величины $DX$ или $D(X)$ . Как и в случае с математическим ожиданием, мы будем использовать скобки лишь при необходимости.

**Дисперсией** случайной величины $X$ называется математическое ожидание случайной величины $(X - EX)^2$:

$$DX = E(X - EX)^2.$$

Если присмотреться, то можно увидеть, что дисперсия случайной величины устроена так же, как дисперсия числового набора. Случайная величина $X - EX$ — это отклонение от среднего значения. Значит, дисперсия — это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

Дисперсия случайной величины равна среднему квадрату отклонения этой случайной величины от своего среднего.

Дисперсия случайной величины неотрицательна. Чем она меньше, тем менее вероятно, что эта случайная величина примет значение, далёкое от математического ожидания.

Если дисперсия случайной величины мала, то мала вероятность того, что случайная величина примет значение, значительно отличающееся от математического ожидания.

Если же дисперсия равна нулю, то случайная величина $X$ принимает единственное значение. Это означает, что случайная величина постоянна.

**Стандартным отклонением** случайной величины $X$ называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sqrt{DX} = \sqrt{E(X - EX)^2}.$$

Название «стандартное отклонение» говорит само за себя — это некоторое среднее, типичное отклонение значений случайной величины от её математического ожидания.

На рисунке 65 показаны диаграммы двух распределений. Математические ожидания $a$ в обоих случаях одинаковы, но стандартное отклонение $s$ у распределения, показанного слева, больше.

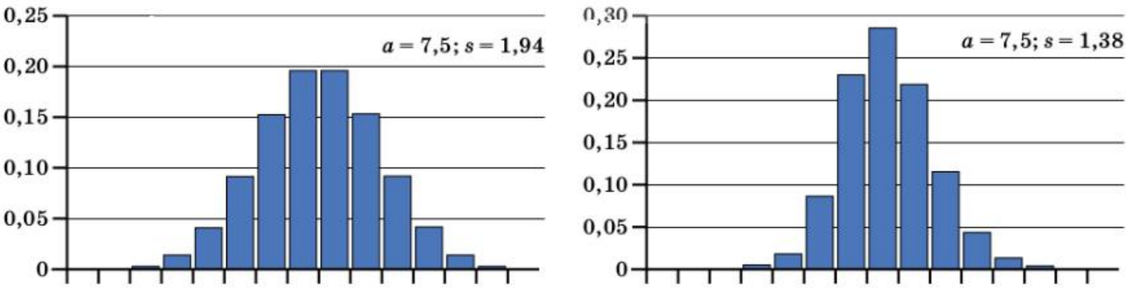



Рисунок 65. **Два распределения с разными стандартными отклонениями**

Видно, что на рисунке справа вероятности значений, близких к $a$, больше, чем на рисунке слева. Диаграмма справа выглядит у́же и выше, чем диаграмма слева.

## Вопросы

1 Сформулируйте определение дисперсии случайной величины и запишите формулу для дисперсии.

2 Что такое стандартное отклонение случайной величины? Запишите формулу стандартного отклонения.

3 Результат измерения площади жилой комнаты — случайная величина, которая измеряется в квадратных метрах. В каких единицах измеряется дисперсия этой случайной величины? В каких единицах измеряется стандартное отклонение этой случайной величины?

## Задачи

**261** Проводится одно испытание Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}5$. Случайная величина $S$ равна числу успехов в этом испытании.

а) Составьте таблицу распределения случайной величины $S$.

б) Найдите дисперсию и стандартное отклонение случайной величины $S$.

**262** Бинарная случайная величина $I$ равна единице с вероятностью $p$ и нулю с вероятностью $q$. Найдите дисперсию $\mathrm{D}I$, если

а) $p = 0{,}8$; б) $p = 0{,}1$; в) $q = 0{,}1$; г) $q = 0{,}4$.

**263** Монету бросают 2 раза. Постройте распределение и найдите дисперсию случайной величины «число выпавших орлов».

**264** Найдите стандартное отклонение случайной величины, если её дисперсия равна:

а) 25; б) 0,36; в) 0,04; г) 2,89.

**265** Найдите дисперсию случайной величины, если её стандартное отклонение равно:

а) 7; б) 0,9; в) 1,3; г) 2,4.

**266** В таблице 17 дано распределение вероятностей случайной величины $X$.

а) Составьте распределение случайной величины $X - \mathrm{E}X$ (отклонения от математического ожидания).

б) Составьте распределение квадрата отклонения $(X - \mathrm{E}X)^2$.

в) Вычислите дисперсию случайной величины $X$.

г) Найдите стандартное отклонение величины $X$.

Таблица 17

| Значение $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,4 | 0,1 | 0,5 |

**267** В таблице 18 дано распределение вероятностей случайной величины $X$.

а) Составьте распределение отклонения $X - \mathrm{E}X$.

б) Составьте распределение квадрата отклонения $(X - \mathrm{E}X)^2$.

в) Вычислите дисперсию случайной величины $X$.

г) Найдите стандартное отклонение величины $X$.

Таблица 18

| Значение $X$ | –3 | –2 | –1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,2 |

# 72* Математическое ожидание и дисперсия числа успехов и частоты успеха в серии испытаний Бернулли

## Число успехов

Напомним, что серией испытаний Бернулли называется последовательность из $n$ одинаковых независимых испытаний, каждое из которых может окончиться успехом с вероятностью $p$ или неудачей с вероятностью $q = 1 - p$.

Число успехов в серии испытаний Бернулли — это случайная величина. Обозначим её буквой $S$. Тогда формулу Бернулли можно записать так:

$$\mathrm{P}(S = k) = C_n^k p^n q^{n-k}.$$

Случайная величина $S$ «число успехов в серии испытаний Бернулли» имеет математическое ожидание и дисперсию.

**Теорема.** Математическое ожидание и дисперсия числа успехов $S$ равны соответственно $\mathrm{E}S = np$ и $\mathrm{D}S = npq$.

**Следствие.** Стандартное отклонение числа успехов равно

$$\sqrt{\mathrm{D}S} = \sqrt{npq}.$$

Примем эту теорему без доказательства.

**ПРИМЕР 1.** Предположим, производится серия из $n = 20$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0{,}4$. Тогда математическое ожидание числа успехов равно $\mathrm{E}S = np = 20 \cdot 0{,}4 = 8$, а дисперсия равна $\mathrm{D}S = npq = 20 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 4{,}8$.

**ПРИМЕР 2.** Стрелок в тире на тренировке 20 раз стреляет по мишени. Найдём среднее значение и стандартное отклонение числа попаданий, если известно, что вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,6.

**Решение.** Обозначим случайную величину «число попаданий» буквой $S$. Серия выстрелов — это серия из 20 испытаний Бернулли. Вероятность успеха равна 0,6, а вероятность неудачи равна 0,4. Тогда

$$\mathrm{E}S = 20 \cdot 0{,}6 = 12,\ \mathrm{D}S = 20 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 4{,}8.$$

Следовательно, стандартное отклонение равно $\sqrt{\mathrm{D}S} = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$.

## Частота успеха

Частота успеха в серии испытаний Бернулли — также случайная величина, которая равна $\frac{S}{n}$. Обозначим эту случайную величину буквой $F$.

Частота успеха $F$ в $n$ раз меньше, чем число успехов $S$, поэтому среднее значение и стандартное отклонение частоты также в $n$ раз меньше, чем среднее значение и стандартное отклонение числа успехов. Доказательство этих фактов мы не приводим, но это интуитивно ясно. Поэтому

$$\mathrm{E}F = \frac{1}{n}\mathrm{E}S = \frac{1}{n} \cdot np = p \quad \text{и} \quad \sqrt{\mathrm{D}F} = \frac{1}{n}\sqrt{npq} = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Обратите внимание на то, что с ростом числа испытаний $n$ математическое ожидание частоты успеха не меняется: оно равно вероятности успеха. Зато стандартное отклонение уменьшается: при неограниченном росте $n$ выражение $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ становится всё меньше и меньше, приближаясь к 0.

При увеличении числа испытаний в серии испытаний Бернулли математическое ожидание частоты успеха неизменно и равно $p$, а стандартное отклонение частоты $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ приближается к 0.

## Вопросы

**1** Чему равно ожидаемое число успехов $S$ при вероятности успеха 0,5 в серии из 20 испытаний? Подбросьте 20 раз монету, считая успехом выпадение орла. Подсчитайте число наступивших успехов. Совпало ли число успехов с ожидаемым значением? Сильно ли оно отличается от ожидаемого значения?

**2** Производится серия испытаний Бернулли. Выберите верное утверждение:
а) чем больше вероятность успеха, тем больше математическое ожидание числа неудач;
б) чем больше вероятность успеха, тем меньше математическое ожидание числа неудач;
в) среднее число успехов зависит только от числа экспериментов и не связано с вероятностью успеха.

**3** Запишите формулы для математического ожидания и дисперсии случайных величин «число успехов» и «частота успеха» в серии из $n$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p$.

**4** Проводятся две серии испытаний Бернулли длины $n$. Вероятность успеха в первой серии равна 0,2, а во второй вероятность успеха равна 0,8. Не производя вычислений, сравните:
а) математические ожидания числа успехов в первой серии и во второй серии;
б) дисперсии числа успехов в первой серии и во второй серии.

**5** Число испытаний $n$ увеличивается. Как себя ведёт при этом:
а) математическое ожидание числа успехов;
б) математическое ожидание числа неудач;
в) дисперсия числа успехов;
г) математическое ожидание частоты успеха;
д) стандартное отклонение частоты успеха?

**6** Верно ли, что в серии испытаний Бернулли дисперсия числа успехов равна дисперсии числа неудач?

## Задачи

**268** По полу рассыпали содержимое коробки, в которой было 100 канцелярских кнопок. Каково математическое ожидание числа «опасных» кнопок, лежащих остриём вверх, если вероятность падения кнопки остриём вверх равна 0,45?

**269** Игральную кость бросили 120 раз. Найдите математическое ожидание случайной величины:
а) «выпавшее число очков делится на 3»; б) «выпала пятёрка».

**270** В тесте из 16 задач каждая задача имеет 4 варианта ответов, но только один ответ из четырёх верный. Миша не готов к тесту и выбирает ответы наугад. Найдите ожидаемое число правильных ответов, которые Миша угадает.

**271** По полу рассыпали содержимое коробки, в которой было 100 канцелярских кнопок. Кнопка падает остриём вверх с вероятностью 0,36. Найдите дисперсию и стандартное отклонение величины «число кнопок, упавших остриём вверх».

**272** Игральную кость бросили 13 500 раз. Рассмотрим случайную величину $X$, равную числу бросков, при которых:

а) выпавшее число очков кратно 3; б) выпала пятёрка.

Найдите $\mathrm{D}X$.

**273** Известно, что 40% жителей города считают, что центральный парк нуждается в реконструкции. Для исследования общественного мнения по этому вопросу добровольцы опросили на улицах 1800 случайных горожан. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение частоты ответа «да» на вопрос «Нужна ли реконструкция в центральном парке?».

**274** Производится серия выстрелов по мишени. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна 0,3. Подсчитывается частота попаданий $F$. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение величины $F$, если всего произведено:

а) 10 выстрелов; б) 1000 выстрелов.

Во сколько раз стандартное отклонение во второй серии меньше, чем в первой?

**275** В условии задачи 274 в первой серии выстрелов оказалось 5 попаданий, а во второй — 286 попаданий.

а) Найдите отклонение частоты от своего математического ожидания в первой серии. Что больше: истинное отклонение частоты или стандартное отклонение частоты?

б) Ответьте на эти же вопросы для второй серии.

**276** Проводится серия из $n$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p$.

а) При каком $p$ дисперсия числа успехов наибольшая возможная?

б) Чему равно наибольшее возможное стандартное отклонение числа успехов?

***Указание.*** Рассмотрите выражение для дисперсии $\mathrm{D}S = npq$ как квадратный трёхчлен от $p$: $y = n(p - p^2)$.

# 73* Закон больших чисел и его применение

## Измерение вероятностей

Когда говорят о бросании симметричной монеты, предполагают, что вероятность появления орла равна 0,5. Говоря о бросании игральной кости, предполагают, что вероятность выпадения любой из шести граней равна $\frac{1}{6}$. Мы так делаем потому, что монета и кость симметричны.

В других случаях тоже иногда делают предположения о вероятностях. Например, считают, что день рождения случайно выбранного человека с равными шансами может приходиться на любой день года. Это не совсем так, но близко к истине. Но в большинстве случаев вероятности событий неизвестны.

Владельца магазина интересует вероятность того, что клиент совершит покупку. Покупателя, приобретающего телевизор или стиральную машину, интересует их надёжность, то есть вероятность того, что купленная вещь прослужит долго. Узнать или вычислить вероятности в этих случаях мы не можем. В п. 17 (ч. 1) мы говорили, что в таких случаях используют оценку вероятности с помощью частоты, т. е. оценку по выборке. Это косвенный способ измерения вероятностей, он основан на **законе больших чисел**.

Одно из проявлений закона больших чисел состоит в том, что при многократном повторении одного и того же опыта частоты событий в этом опыте будут близки к их вероятностям.

Строгое доказательство этого утверждения мы не приводим, поясним лишь, почему так получается. Последовательность повторяющихся и независимых опытов можно рассматривать как серию испытаний Бернулли. Пусть испытаний $n$, неизвестная вероятность нужного события (успеха) равна $p$, а измеренная частота успеха равна $F$.

Мы знаем, что с ростом числа $n$ среднее значение частоты равно $p$, а стандартное отклонение частоты уменьшается, приближаясь к нулю:

$$\mathrm{E}F = p,\ \sqrt{\mathrm{D}F} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \to 0.$$

Поэтому при достаточно больших $n$ частота $F$ изучаемого события мало отличается от его вероятности $p$.

**ПРИМЕР 1.** Крупная почтовая компания заключила договор с IT-компанией на обслуживание компьютерной системы. Компьютерная система обширная, она охватывает множество городов, в ней десятки тысяч компьютеров, и нередко случаются сбои или отказы, которые нужно быстро устранить.

Рассмотрим событие $A$ «сбой устранён менее чем за 8 часов». Будем считать это событие успехом. Оценим неизвестную вероятность $p$ этого события. Каждый отдельный отказ оборудования можно рассматривать как испытание Бернулли. Начнём отсчёт с какого-то момента.

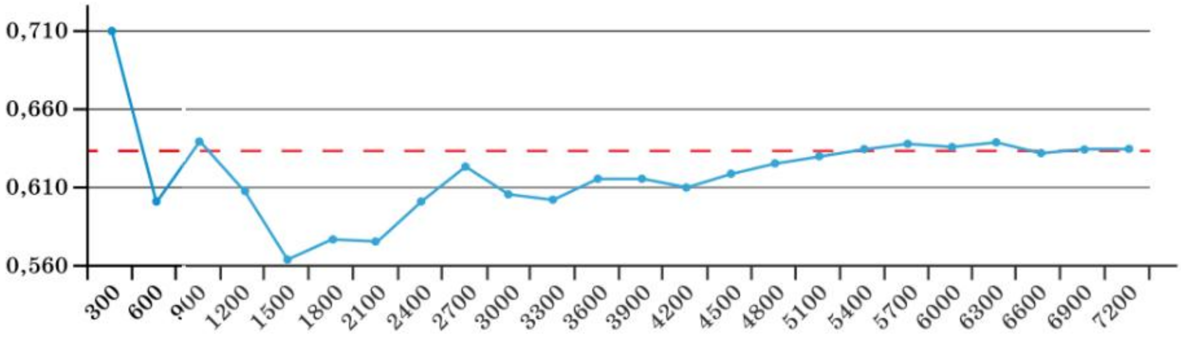
Известно, что 71,2% отказов из первых 300 были устранены менее чем за 8 часов после сообщения об отказе. Иными словами, в серии из 300 испытаний событие $A$ имеет частоту 0,712. Из следующих 300 сбоев только 49% были устранены менее чем за 8 часов, т. е. во второй серии из 300 испытаний частота успеха равняется 0,49. Но если рассмотреть объединённую серию из 600 испытаний, то в этой серии частота успеха равна

$$\frac{300 \cdot 0{,}712 + 300 \cdot 0{,}49}{600} \approx 0{,}601$$

(мы проводим вычисления с точностью до тысячных). И так далее: каждая следующая серия из 300 испытаний вносит свой вклад. Частота события $A$ меняется от серии к серии, но частота в объединённой серии, в которой накапливаются всё новые и новые наблюдения, постепенно стабилизируется.

График этого процесса показан на рисунке (диагр. 3).

Диаграмма 3. **Стабилизация частоты события**




Чем больше испытаний, тем меньше изменчивость частоты события $A$. Если испытаний много, то, скорее всего, частота события $A$ близка к его вероятности (например, можно считать частоту и вероятность близкими, если различие между ними менее 0,001). Начиная с какого-то момента эту близость можно считать практически достоверным событием. Напротив, событие «частота далека от вероятности» с ростом числа испытаний становится маловероятным, и его можно не принимать в расчёт, пользуясь принципом практической невозможности (см. ч. 1, п. 30).

Пусть, как и прежде, $S$ и $F$ — это число успехов и частота успеха в серии испытаний Бернулли. Теория вероятностей не только утверждает, что при большом числе испытаний $n$ верно приближённое равенство

$$p \approx F = \frac{S}{n},$$

но и позволяет оценить точность этого приближения.

Если мы собираемся использовать частоту события вместо его неизвестной вероятности, то хотим, чтобы отклонение частоты от вероятности было малым практически наверняка. Предположим, что нас устроит измерение вероятности $p$ с погрешностью не более 0,05, то есть мы хотим, чтобы выполнялось неравенство

$$p - 0{,}05 < F < p + 0{,}05.$$

Следовательно, нужно выбрать $n$ так, чтобы вероятность выполнения этого неравенства была близка к единице. Оказывается, что уже при $n = 400$ вероятность выполнения этого неравенства больше, чем 0,95. Таким образом, при $n = 400$ погрешность измерения с вероятностью 0,95 не превышает 0,05.

Можно достичь меньшей погрешности и большей достоверности. Например, при $n \geqslant 1850$ погрешность измерения не превышает 0,03 с вероятностью, большей чем 0,99.

При измерении вероятности с помощью частоты следует помнить о двух величинах: допустимой погрешности измерения и вероятности того, что эта погрешность не будет превышена.

Чем меньше допустимая погрешность и чем выше желаемая вероятность безошибочного измерения, тем больше опытов требуется. На практике это очень важно, поскольку большое количество опытов требует много времени и средств.

## Социологические исследования

При большом числе испытаний Бернулли в силу закона больших чисел частота успеха близка к его вероятности. Этот результат важен для социологических исследований.

**ПРИМЕР 2.** Предположим, что нас интересует, какова доля избирателей, готовых поддержать на выборах кандидата К. С нашей точки зрения, упомянутая доля — это вероятность $p$ того, что наудачу выбранный избиратель окажется сторонником кандидата К. Хорошо бы опросить всех избирателей и узнать, сколько из них поддерживает кандидата К. Но, к сожалению, до выборов это невозможно. Кроме того, люди не обязаны отвечать на вопросы о своих политических предпочтениях.

Вместо того чтобы опрашивать всех, опрашивают небольшую группу избирателей — выборку. Важно, чтобы выборка правильно представляла всю совокупность избирателей. Оказывается, нет лучшего способа добиться такого сходства, чем составлять выборку случайно.

Численность выборки обозначим $n$. Результат опроса каждого человека в выборке **(респондента)** будем считать успехом, если он высказался в пользу кандидата К., а в противном случае назовём результат неудачей. Неизвестная вероятность успеха равна $p$, и можно считать, что она остаётся неизменной на протяжении всего опроса. В качестве приближённого значения этой вероятности принимают частоту успеха в выборке.

В отчётах о социологических опросах обычно сообщается не только приближённое значение $p$, но также точность приближения и численность выборки. И хотя выборки бывают разными, обычная их численность — около 2000 человек. Этого объёма выборки достаточно, чтобы обеспечить высокую точность выводов, независимо от того, как велика изучаемая совокупность.

К сожалению, в отчётах часто не говорят о том, что малая погрешность достигается не наверняка, а с большой вероятностью.

Численность выборки, обеспечивающей нужную точность выводов, не связана с численностью обследуемой совокупности.

## Связь выборочного среднего и математического ожидания

Закон больших чисел позволяет нам вместо неизвестных вероятностей событий использовать их частоты, подсчитанные по выборкам объёмом от нескольких сотен до нескольких тысяч наблюдений.

Другое проявление закона больших чисел состоит в том, что вместо неизвестного математического ожидания случайной величины можно использовать среднее значение, полученное по выборке.

Если мы произведём много измерений случайной величины, то получим набор данных, который является случайной выборкой. Мы найдём среднее арифметическое этого набора **(среднее выборочное)**, и в силу закона больших чисел это среднее значение окажется близко к неизвестному математическому ожиданию.

Среднее значение данных в выборке (среднее выборочное) используется как приближённое значение математического ожидания.

**ПРИМЕР 3.** Рассмотрим случайную величину «размер горошины определённого сорта». Мы хотим найти её истинное среднее значение, то есть математическое ожидание. Мы не знаем распределение, которому подчиняется размер горошин, поскольку мы не можем собрать и измерить все такие горошины. Но мы можем сделать выборку, то есть произвести много измерений и найти среднее арифметическое. Возьмём 1000 горошин определённого сорта, измерим диаметр каждой горошины с округлением до 1 мм и занесём результаты в таблицу 19.

Таблица 19. **Измерение горошин**

| **Диаметр горошины, мм** | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| **Частота** | 0,109 | 0,547 | 0,328 | 0,016 |

Среднее арифметическое равно

$$\overline{x} = 5 \cdot 0{,}109 + 6 \cdot 0{,}547 + 7 \cdot 0{,}328 + 8 \cdot 0{,}016 = 6{,}251.$$

Полученное среднее значение является **оценкой математического ожидания** случайной величины «диаметр горошины». Чем больше измерений сделано, тем выше точность оценки. Иными словами, закон больших чисел даёт нам уверенность в том, что величина 6,251 мм близка к среднему диаметру всех горошин этого сорта, выращенных в похожих условиях.

Усреднение измерений увеличивает достигаемую точность.

## Вопросы

**1** Приведите примеры проявления закона больших чисел.

**2** Как оценивают математическое ожидание случайной величины?

**3** Нужно ли знать общую численность всех жителей России, чтобы с помощью выборочного метода установить, какая доля жителей предпочитает по утрам чай, а какая — кофе?

**4** Как можно увеличить точность не очень точных измерений?

# Ответы

## Глава X

1. а), б) и в). Граф под буквой г) не связен, а граф под буквой д) содержит цикл. 5. а) 1; б) 3; в) 1. 6. Например, опыт, в котором сначала подбрасывают монету, а затем игральный кубик. 9. а) 8; б) 12; в) 2. 12. а) Четыре цепи длиной 2 и две цепи длиной 3; б) три цепи длиной 2, пять цепей длиной 3 и две цепи длиной 4. 19. а) 8; б) 7; в) 9. 20. 6 элементарных событий благоприятствуют событию $A$ и 5 — событию $B$. 21. а) «У здорового пациента результат теста отрицателен»; б) «у больного пациента результат теста отрицателен»; в) «у здорового пациента результат положителен». 22. а) $d$, $e$, $f$, $h$ и $k$; б) $h$ и $k$; в) $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$ и $n$; г) $a$, $b$, $c$, $g$ и $n$.

## Глава XI

26. Высказывания а) и б) истинны, а высказывания в) и г) могут оказаться ложными. 27. Высказывания а) и в) истинны; истинность высказываний б) и г) нельзя определить. 28. а) Могут, например, при $X = 15$; б) не могут. 29. а) «Данное число простое и чётное»; это утверждение может быть истинным, если данное число равно 2; б) «Данное число простое или чётное»; это утверждение будет ложным, если данное число нечётное составное, например 35. 30. а) «У этого гриба на шляпке чешуйки, и он ядовитый»; б) «У этого гриба на шляпке чешуйки, или он ядовитый». 31. 2. 32. 2. 34. а) Нет; б) да; в) нет. 35. а) ОО, РО и РР; б) ОО, РО и ОР. 36. а) ОРО и ОРР; б) ОРР и РОР. 39. а) Ложно; б) ложно; в) истинно. 40. а) Истинно; б) ложно; в) истинно.

## Глава XII

41. 8. 42. а) 0,6; б) 0,15; в) 0,87; г) $\frac{1}{2}$. 44. Не обязательно. 45. 0,97. 46. а) $\frac{1}{251}$; б) $\frac{250}{251}$. 47. 0,81. 48. 0,75. 49. 0,05. 50. а) Нет; б) да; в) да; г) да. 51. а) {1, 2, 3, 4, 5}; «выпало меньше шести очков»; $P(A) = \frac{5}{6}$; б) {1, 3, 5}; «выпало нечётное число очков»; $P(A) = \frac{1}{2}$; в) {1, 2, 4, 5}; «выпавшее число очков не делится на 3»; $P(A) = \frac{2}{3}$; г) {1, 6}; «выпала единица или шестёрка»; $P(A) = \frac{1}{3}$. 52. а) «Сумма выпавших очков больше 2»; $\frac{35}{36}$; б) «сумма выпавших очков меньше 12»; $\frac{35}{36}$; в) «сумма выпавших очков не меньше, чем 4»; $\frac{11}{12}$; г) «в сумме выпало не менее 10 очков»; $\frac{11}{12}$. 53. а) 10; б) 0,4; в) «выбран мальчик»; г) 0,6. 55. а) $\frac{15}{16}$; б) $\frac{5}{16}$; в) $\frac{5}{16}$; г) $\frac{3}{8}$. 56. а) Например, «хотя бы один из выбранных учеников — девочка»; б) «выбран один мальчик и одна девочка». 57. а) Например, «в течение года не перегорит ни одна из лампочек»; б) «в течение года перегорят одна, три, четыре или все пять лампочек»; в) «в течение года перегорят одна, две или три лампочки»; г) например, «в течение года перегорят четыре или пять лампочек». 58. 49. 59. 13. 60. а) 2; б) 4; в) 10. 61. а) 4; б) 6.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | × |
| 2 | × | | | | | |
| 3 | × | | | | | |
| 4 | × | | | | | |
| 5 | × | | | | | |
| 6 | × | | | | | |

Рисунок 66

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | × | | × | | × |
| 2 | × | × | × | × | × | × |
| 3 | | × | | × | | × |
| 4 | × | × | × | × | × | × |
| 5 | | × | | × | | × |
| 6 | × | × | × | × | × | × |

Рисунок 67

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | × | × |
| 2 | | | | | × | × |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Рисунок 68

**62.** а) 2; б) 5. **63.** $A = \{OO;\ OP\}$; $B = \{OO;\ PO\}$; $A \cup B = \{OO;\ OP;\ PO\}$. **64.** а) Первый раз выпала решка, и второй раз выпала решка; б) оба раза выпал орёл, и оба раза выпала решка. **66.** «Выбраны две девочки» и «хотя бы один из выбранных учеников — девочка». **68.** а) $\{2;\ 3;\ 4;\ 6\}$; $\frac{2}{3}$; б) $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$; 1; в) $\{2;\ 4;\ 6\}$; $\frac{1}{2}$; г) $\{2;\ 4;\ 5;\ 6\}$; $\frac{2}{3}$. **69.** а) См. рис. 66; б) одно; в) «хотя бы один раз выпала единица»; г) $\frac{11}{36}$. **70.** б) «Хотя бы один раз выпадет число, кратное трём»; в) $\frac{5}{9}$. **71.** а) См. рис. 67, 27; б) «Хотя бы раз выпадет чётное число очков»; г) 0,75. **74.** а) 6; б) 4; в) 6; г) 2. **75.** а) См. рис. 68; б) $\frac{1}{9}$. **76.** а) $\overline{A} \cap B$; б) $\overline{A} \cap \overline{B}$. **79.** а) $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$; б) $(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$. **82.** а) Да; б) $\frac{2}{3}$. **83.** а) 0,6; б) 0,7. **84.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет. **85.** а) 1; б) 0,8. **86.** а) 0,5; б) 0,3. **87.** а) 0,48; б) 0,36. **88.** а) 0,25; б) 0,75; в) 0,15; г) 0,95. **89.** Нет. **92.** $CBA$. **93.** $BCA$. **94.** Наименее вероятное событие $C$. **95.** 0,47. **96.** 0,966. **97.** 0,24. **98.** 0,09. **99.** 0,41. **100.** 0,8.

## Глава XIII

**101.** а) 0,5; б) 0,5; в) 0. **102.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{3}{5}$; г) 0. **103.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 0. **104.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 0; г) $\frac{1}{6}$. **105.** а) 0,15; б) $\frac{1}{8}$; в) 0,18; г) 0,068. **106.** 0,042. **107.** $\frac{1}{8}$. **108.** а) $\frac{1}{46}$; б) $\frac{6}{115}$; в) $\frac{9}{230}$; г) $\frac{6}{115}$. **109.** а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{5}{18}$; в) $\frac{5}{54}$; г) $\frac{5}{324}$; д) 0. **110.** а) 21; б) 5. **113.** б) 5; в) $P(SAC) = 0{,}35$, $P(SBE) = 0{,}1$. **114.** б) $P(SAC) = \frac{1}{3}$, $P(SAGF) = \frac{1}{24}$. **115.** в) $\frac{13}{24}$. **116.** б) $\frac{5}{18}$; в) $\frac{4}{9}$. **117.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{5}{18}$; г) $\frac{5}{18}$. **118.** $\approx 0{,}235$. **119.** а) $\approx 0{,}380$; б) $\approx 0{,}042$; в) $\approx 0{,}089$. **120.** 0,92. **121.** 0,0595. **122.** 0,078. **123.** а) 0,16; б) 0,04. **124.** $\frac{2}{3}$. **125.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **126.** $\approx 0{,}176$. **127.** а) 0,24; б) 0,08. **128.** а) 0,6; б) 0,4. **129.** а) 0,012; б) 0,012. **130.** а) 0,2; б) 0,6. **131.** а) Да; б) нет. **132.** а) Да; б) нет. **133.** а) Да; б) да. **134.** а) Да; б) нет. **135.** а) 0,04; б) 0,008; в) 0,00032. **136.** Нет. **137.** 0,7.

## Глава XIV

**139.** а) 32; б) 18; в) 180; г) 90. **140.** а) 160; б) 252; в) 1365; г) 336. **141.** 55. **142.** 10 000. **143.** Поровну. **144.** а) 2; б) 8; в) 1024; г) $2^n$. **145.** 11 и 13. **146.** $92^8 \approx$

$\approx 5\,132\,188\,731\,375\,620$. **148.** 6. **149.** 120. **150.** а) 720; б) 40 320; в) 3 628 800; г) $k!$. **151.** а) 5040; б) 120; в) 720; г) 360. **152.** а) 60; б) 42; в) 90; г) 100; д) 105; е) 220. **153.** а) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12; 24; б) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120. **155.** $\frac{2}{30!}$. ***Решение.*** Общее число равновозможных событий равно числу перестановок 30 учащихся: $N = 30!$. Ученики по росту могут встать двумя способами: по возрастанию или по убыванию. Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{2}{30!} \approx 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,007\,54.$$

Это очень маловероятное событие. **156.** $\frac{1}{1\,728\,000} \approx 0{,}000\,000\,578\,7$. **157.** 0,3439. ***Указание.*** Сначала удобно найти вероятность противоположного события «цифры 8 нет». **158.** 0,006. **159.** а) 0,729; б) 0,729; в) 0,512; г) 0,343. **160.** а) 0,271; б) 0,488; в) 0,657; г) 0,784. **161.** а) и б) $\frac{1}{10!} \approx 2{,}76 \cdot 10^{-7}$. **162.** а) $\frac{1}{12!} \approx 2{,}088 \cdot 10^{-9}$; б) $1 - \frac{1}{12!}$; в) $\frac{1}{12!}$; г) 0. **163.** $\frac{1}{8!} \approx 2{,}48 \cdot 10^{-5}$. **164.** 0,0768. **165.** а) 4; б) 10; в) 21; г)* 165; д)* 924; е)* 495. **166.** В каждой паре числа равны. **167.** Все числа равны 1. **168.** а) 50; б) 67. **169.** а) 50; б) 65. **170.** а) 36; б) 15; в) 495; г) 1287. **171.** а) 210; б) 3003. **172.** а) 20; б) 35; в) 120. **173.** а) 126; б) 120; в) 28; г) 252. **174.** а) 20; б) 6. **175.** а) 20; б) 126. **176.** а) 330; б) 495; в) 1365; г) 4845. **177.** а) 376 992; б) 13 983 816. **178.** а) 184 756; б) 1; в) $\frac{1}{184\,756} \approx 0{,}000\,005\,4$. **179.** 0,1. **180.** 0,2. **181.** $\frac{1}{56}$. **182.** а) $\approx 0{,}715 \cdot 10^{-8}$; б) вероятность такая же. **183.** $\approx 0{,}0083$. **184.** а) $\frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$; б) $\frac{1}{6}$. **185.** $\frac{1}{6}$. **186.** а) $\frac{C_{12}^5}{C_{15}^5} \approx 0{,}264$; б) $\approx 0{,}736$; в) $\frac{C_3^2 C_{12}^3}{C_{15}^5} \approx 0{,}22$; г) $\approx 0{,}022$.

## Глава XV

**187.** $\frac{1}{2}$. **188.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$. **189.** $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$. **190.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{n}{2(m+n)}$. **191.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{m+2n}{2m+2n}$. **192.** а) $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}414$. **193.** а) $1 - \frac{3\pi}{80} \approx 0{,}882$; б) 1. **194.** $1 - \frac{\pi}{100} \approx 0{,}969$. **196.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **197.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **198.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{6}$. **199.** а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$. **200.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **201.** $\frac{1}{12}$. **202.** а) 0,5; б) 0,3; в) 0,3; г) 0,1. **203.** а) 0,25; б) 0,7; в) 0,1; г) 0,8. **204.** $\frac{5}{6}$. **205.** а) 0,25; б) 0,12; в) 0,12; г) 0,6. **206.** а) $\approx 0{,}844$; б) $\approx 0{,}156$. **207.** а) 0,5; б) 0,7. **208.** а) 0,5; б) 0,5; в) 0,5; г) 1.

## Глава XVI

**209.** 3 и 4. **211.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{16}$; в) $\frac{3}{16}$; г) $\frac{1}{16}$. **212.** а) $\frac{1}{16}$; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{7}{8}$. **213.** а) $\frac{3}{4}$; б) 0,98; в) $\frac{5}{7}$; г) 0,17. **214.** а) $\approx 0{,}139$; б) $\approx 0{,}116$; в) $\approx 0{,}067$; г) $\approx 0{,}518$. **215.** а) $\approx 0{,}015$; б) $\approx 0{,}374$. **216.** а) $qp$; б) $q^4$; в) $1 - q^6$; г) $q^2(1 - q^3)$. **217.** а) 0,21; б) $\approx 0{,}882$.

**218.** а) $\approx 0{,}102$; б) 0,488. **219.** а) 0,081; б) $\approx 0{,}139$. **220.** 5 патронов (вероятность $\approx 0{,}922$). **221.** 14. **222.** а) УННН; НУНН; ННУН; НННУ; б) УУНН; НУУН; ННУУ; УНУН; НУНУ; УННУ; в) НУУУ; УНУУ; УУНУ; УУУН. **224.** а) ННННН; б) УНННН; НУННН; ННУНН; НННУН; ННННУ; в) УУННН; УНУНН; УННУН; УНННУ; НУУНН; НУНУН; НУННУ, ННУУН, ННУНУ; НННУУ. **225.** а) $\frac{25}{1296} \approx 0{,}019$; б) $\approx 0{,}096$; в) $\approx 0{,}004$. **226.** $\frac{8}{243} \approx 0{,}033$. **227.** а) УУНН; НУУН; ННУУ; УНУН; НУНУ; УННУ; б) НУУУУУ; УНУУУУ; УУНУУУ; УУУНУУ; УУУУНУ; УУУУУН. **228.** а) 28; б) 28; в) 56; г) 56. **229.** а) 1; б) 10; в) 35; г) $C_n^3$. **230.** Поровну. **231.** а) 4; б) 6; в) 8; г) 11. **232.** ***Указание.*** Используйте свойство чисел сочетаний. **233.** а) $C_n^2+C_n^3$; б) $1+n+C_n^2+C_n^3+C_n^4+C_n^5$; в) $C_n^4+C_n^6+C_n^9$; г) $1+n+C_n^2+C_n^3$. **234.** а) 134; б) 134. **235.** а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{16}$. **236.** а) 0,125; в) $\approx 0{,}273$; г) $\approx 0{,}164$; г) $\frac{C_n^3}{2^n}$. **237.** а) $\approx 0{,}054$; б) $\approx 0{,}00064$; в) $\approx 0{,}402$; г) $\approx 0{,}00002$; д) $\approx 0{,}201$; е) $\approx 0{,}335$. **238.** 0,125. **239.** а) 0,3125; б) $\approx 0{,}781$; в) $\approx 0{,}469$; г) 0,5. **240.** а) $\approx 0{,}018$; б) $\approx 0{,}150$; в) $\approx 0{,}405$. **241.** а) $\approx 0{,}165$; б) $\approx 0{,}041$; в) $\approx 0{,}790$; г) $\approx 0{,}539$. **242.** а) 0,1792; б) 0,5248; в) 0,8704; г) 0,9744. **243.** а) $\approx 0{,}054$; б) $\approx 0{,}193$; в) $\approx 0{,}9998$; г) $\approx 0{,}997$. **244.** а) $\approx 0{,}056$; б) $\approx 0{,}526$; в) $\approx 0{,}922$.

## Глава XVII

**245.** Да; возможные значения 2 и 3. **246.** 3, 4 и 5. **247.** а) 0, 20 и 100; б) 0, 20, 40, 100, 120, 200. **248.** Чётные числа от 2 до 16 (часто на нескольких первых и последних страницах номера не печатают, но номера у них всё равно есть). **249.** а) Натуральные числа от 2 до 12; б) натуральные числа от 3 до 18; в) все натуральные числа от 1 до бесконечности; г) целые числа от 0 до $n$. **250.** а) От 0 до 20 (21 значение); б) от 0 до 32 (33 значения).

**251.** а)

| Число орлов | 0 | 1 |
|---|---|---|
| Вероятность | 0,5 | 0,5 |

б)

| Число орлов | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,25 | 0,5 | 0,25 |

в)

| Число орлов | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Вероятность | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 |

**252.** а)

| Наибольшее | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |

б)

| Наименьшее | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Вероятность | $\frac{11}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

**253.** а) $\frac{1}{72}$; б) 0,04. **254.** а) 0,23; б) 0,47; в) 0,9; г) 0,53. **257.** а) $\frac{143}{36}$; б) 0,14. **258.** а) 0; б) 9. **259.** $-\frac{50}{3}$ р., то есть $\approx -16$ р. 67 к. **260.** 12 р.

**261.** а)

| Значение | 0 | 1 |
|---|---|---|
| Вероятность | 0,5 | 0,5 |

; б) дисперсия равна 0,25, стандартное отклонение равно 0,5.

**262.** а) 0,16; б) 0,09; в) 0,09; г) 0,24. **263.** Дисперсия равна 0,5. **264.** а) 5; б) 0,6; в) 0,2; г) 1,7. **265.** а) 49; б) 0,81; в) 1,69; г) 5,76.

**266.** а) и б)

| Значение $X - \mathrm{E}X$ | –1,1 | –0,1 | 0,9 |
|---|---|---|---|
| Значение $(X - \mathrm{E}X)^2$ | 1,21 | 0,01 | 0,81 |
| Вероятность | 0,4 | 0,1 | 0,5 |

; в) 0,89; г) $\approx$ 0,943.

**267.** а) и б)

| Значение $X - \mathrm{E}X$ | –1,5 | –0,5 | 0,5 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|
| Значение $(X - \mathrm{E}X)^2$ | 2,25 | 0,25 | 0,25 | 2,25 |
| Вероятность | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,2 |

; в) 1,05; г) $\approx$ 1,02.

**268.** 45. **269.** а) 40; б) 20. **270.** 4. **271.** 23,04 и 4,8. **272.** а) 3000; б) 1875. **273.** Математическое ожидание 0,4; стандартное отклонение $\approx$ 0,012. **274.** а) $\mathrm{E}F = 0{,}3$; $\sqrt{\mathrm{D}F} \approx 0{,}145$; б) $\mathrm{E}F = 0{,}3$; $\sqrt{\mathrm{D}F} \approx 0{,}0145$. Стандартное отклонение уменьшилось в 10 раз. **275.** а) 0,2; $0{,}2 > \sqrt{\mathrm{D}F}$; б) $0{,}014 < \sqrt{\mathrm{D}F}$. **276.** а) При $p = 0{,}5$; б) $0{,}5\sqrt{n}$.

# Предметный указатель

# Справочные материалы

### Среднее арифметическое

**Средним арифметическим** $\overline{x}$ числового массива называется отношение суммы всех чисел массива к их количеству $n$.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

### Медиана

**Медианой** числового массива называют такое число $m$, что хотя бы половина чисел массива не больше числа $m$ и хотя бы половина чисел массива не меньше числа $m$.

Чтобы найти медиану числового массива, нужно выполнить следующие действия.

1. Упорядочить массив по возрастанию. Получится вариационный ряд.

2. Если в массиве нечётное количество чисел, то медианой является число, стоящее посередине вариационного ряда.

3. Если в массиве чётное количество чисел, то медианой обычно считают среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине.

### Размах

**Размах числового массива** — это разность между наибольшим и наименьшим значениями.

### Частота значения $a$

Пусть в наборе всего $N$ чисел, и значения, равные $a$, встречаются $N_a$ раз. **Частотой** значения $a$ называется отношение $\frac{N_a}{N}$.

**Свойство частот.** В любом наборе сумма частот значений равна единице.

Например, для набора, в котором четыре различных значения $a$, $b$, $c$ и $d$:

$$\frac{N_a}{N} + \frac{N_b}{N} + \frac{N_c}{N} + \frac{N_d}{N} = \frac{N_a + N_b + N_c + N_d}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

### Множества

**Пустое множество** — это множество, которое не содержит элементов. Обозначают пустое множество символом $\varnothing$.

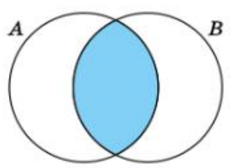
Множество $B$ называется **подмножеством** множества $A$, если любой элемент множества $B$ принадлежит множеству $A$. Обозначают: $B \subset A$.

### Пересечение множеств $A$ и $B$

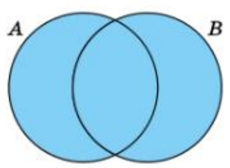
**Пересечение** множеств $A$ и $B$ — это множество $A \cap B$, которое содержит элементы, принадлежащие и множеству $A$, и множеству $B$.

### Объединение множеств $A$ и $B$

**Объединение** множеств $A$ и $B$ — это множество $A \cup B$, содержащее все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $A$ и $B$.



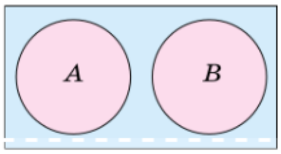

Пересечение множеств $A$ и $B$




Объединение множеств $A$ и $B$

События $A$ и $B$ называются **несовместными**, если их пересечение не содержит элементарных событий.

$$A \cap B = \varnothing.$$



Несовместные события

### Правило умножения

Если множество $A$ состоит из $n$ элементов, а множество $B$ — из $k$ элементов, то множество упорядоченных пар $(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$, состоит из $nk$ элементов.

### Вероятность события

Если в случайном опыте конечное число элементарных событий и все они равновозможны, то вероятность $\mathrm{P}(A)$ события $A$ равна отношению числа $N(A)$ элементарных событий, благоприятствующих событию $A$, к общему числу $N$ элементарных событий:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

### Правило сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность объединения несовместных событий $A$ и $B$ равна сумме их вероятностей:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

### Правило сложения вероятностей

Вероятность объединения событий $A$ и $B$ равна сумме их вероятностей без вероятности их пересечения:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

### Правило умножения вероятностей

Вероятность пересечения событий $A$ и $B$ равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности другого:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(A|B).$$

### Формула условной вероятности

Если вероятность события $B$ больше нуля, то $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.

### Перестановки

**Перестановкой** из $n$ предметов называется любой способ нумерации этих предметов (способ их расположения в ряд).

**Факториалом** натурального числа $n$ называется произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$. Обозначается факториал $n!$:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n\ ; \quad 0! = 1$$

**Число перестановок** $n$ предметов равно $n!$.

### Сочетания

Число способов, которыми можно выбрать ровно $k$ предметов из множества, в котором $n$ предметов, называется **числом сочетаний** из $n$ по $k$ и обозначается $C_n^k$ (читается «цэ из эн по ка»).

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Если число $n$ небольшое, то число сочетаний $C_n^k$ можно взять из треугольной таблицы, которая называется **треугольником Паскаля**.

1 4-й столбец $C_6^4 = 15$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

6-я строка 1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

### Правило вычисления геометрической вероятности

Пусть из фигуры $F$ производится случайный выбор точки. Вероятность события $G$ «выбранная точка принадлежит фигуре $G$, которая содержится в фигуре $F$», равна

$$\mathrm{P}(G) = \frac{S_G}{S_F},$$

где $S_F$ и $S_G$ — площади фигур $F$ и $G$ соответственно.

### Формула Бернулли

В серии испытаний Бернулли вероятность события «ровно $k$ успехов» равна

$$C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $n$ — число испытаний, $p$ — вероятность успеха и $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

### Математическое ожидание

**Математическое ожидание** случайной величины — это сумма произведений значений этой величины и их вероятностей:

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

### Дисперсия

**Дисперсией** случайной величины $X$ называется математическое ожидание случайной величины $(X - \mathrm{E}X)^2$:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2.$$

### Стандартное отклонение

Стандартным отклонением случайной величины $X$ называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sqrt{\mathrm{D}X} = \sqrt{\mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2}$$

# Функции электронных таблиц

Вспомним функции электронных таблиц, рассмотренные в первой части учебника.

Для вычисления среднего арифметического предусмотрена специальная функция

СРЗНАЧ()

На рисунке показан пример вычисления среднего значения массива из четырёх чисел.

*fx* =СРЗНАЧ(C1:C4)

| C | D | E |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 9 | | |
| 5 | | |
| 6 | Среднее | 5,25 |

Чтобы подсчитать, сколько раз в наборе встречается определённое значение, используйте функцию

СЧЁТЕСЛИ()

На рисунке подсчитано, что в данном наборе число 1 встречается 5 раз.

*fx* =СЧЁТЕСЛИ(B1:D5;1)

| B | C | D | E |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 5 |
| 1 | 2 | 2 | |
| 1 | 2 | 1 | |
| 1 | 3 | 2 | |
| 2 | 4 | 4 | |

Чтобы найти количество значений, попавших в каждый интервал группировки, используйте функцию

ЧАСТОТА()

На рисунке показан пример: сколько значений меньше 0, сколько от 0 до 1, от 1 до 2 и т. д.

**Внимание!** Функция ЧАСТОТА находит не частоту, а количество значений в интервалах.

*fx* =ЧАСТОТА(C2:D7;E2:E7)

| C | D | E | F |
|---|---|---|---|
| Данные | | Инт-лы | Количество |
| 1,4 | 1,3 | 0 | 0 |
| 1,8 | 2,6 | 1 | 0 |
| 2,3 | 3,1 | 2 | 5 |
| 3,5 | 2,7 | 3 | 5 |
| 2,1 | 1,8 | 4 | 2 |
| 1,3 | 2,6 | 5 | 0 |

Для получения случайного числа на интервале от 0 до 1 используется функция

СЛЧИС()

Другая функция для случайного выбора:

СЛУЧМЕЖДУ()

Эта функция выбирает целое случайное число на указанном отрезке натурального ряда. На рисунке показано, как можно имитировать бросание игральной кости.

*fx* =СЛЧИС()

| C | D | E |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| 0,616585 | | |

*fx* =СЛУЧМЕЖДУ(1;6)

| D | E | F |
|---|---|---|
| | | |
| 6 | | |
| | | |

Чтобы найти медиану массива данных, удобно использовать функцию

**МЕДИАНА()**

*fx* =МЕДИАНА(C1:C5)

| C | D | E |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 9 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 3 | Медиана | 5 |

Для того чтобы быстро вычислить сумму произведений значений и их частот есть функция

**СУММПРОИЗВ()**

*fx* =СУММПРОИЗВ(D2:G2;D3:G3)

| C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| Значение | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Частота | 0,1 | 0,3 | 0,45 | 0,15 |
| | | | Среднее | 3,65 |

Для вычисления дисперсии числового массива используйте функцию

**ДИСПР() или ДИСП.Г()**

*fx* =ДИСПР(C1:C5)

| C | D | E |
|---|---|---|
| 3 | | |
| 1 | | |
| 3 | | |
| 7 | | |
| 5 | 4,16 | |

Чтобы узнать, сколько всего значений в массиве данных, используйте функцию

**СЧЁТ()**

*fx* =СЧЁТ(C2:D7)

| C | D | E | F |
|---|---|---|---|
| Данные | | | |
| 1,4 | 1,3 | | 12 |
| 1,8 | 2,6 | | |
| 2,3 | 3,1 | | |
| 3,5 | 2,7 | | |
| 2,1 | 1,8 | | |
| 1,3 | 2,6 | | |

Для поиска наименьшего и наибольшего значений есть функции

**МИН() и МАКС()**

Чтобы найти размах, нужно вычислить разность:

**= МАКС() – МИН()**

*fx* =МАКС(C1:C5)-МИН(C1:C5)

| C | D | E | F |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 9 | | | |
| 5 | Наим. | 1 | |
| 6 | Наиб. | 9 | |
| 3 | Размах | 8 | |

Чтобы найти стандартное отклонение, можно извлечь корень из дисперсии:

**КОРЕНЬ(ДИСПР( ))**

Но в современных редакторах есть специальная функция

**СТАНДОТКЛОН.Г()**

*fx* =СТАНДОТКЛОН.Г(C1:C5)

| C | D | E | F |
|---|---|---|---|
| 3 | | | |
| 1 | | | |
| 3 | | | |
| 7 | | | |
| 5 | 2,039608 | | |

# Оглавление